U.C. 21082
Matemática Finita

8 de junho de 2016

Critérios de avaliação

Questões de Escolha Múltipla:

- Na prova de **Exame**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores.
- No **P-fólio**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

Restantes Questões:

- Para a correcção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas.

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

Exame: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**	**4.**
b)	**d)**	**a)**	**d)**

P-fólio: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
b)	**a)**	**d)**

5. (**Exame**: 2.50 valores)

5.1. (**Exame**: 1.0 valor)
Esta questão é semelhante ao Exercício 1b) do Texto de Apoio 2.

5.2. (**Exame e P-fólio**[1]: 1.50 valor)
Consideremos os dois indivíduos específicos como um único indivíduo. Há então 6 indivíduos, que podem dispor-se ao redor da mesa de 5! maneiras possíveis, cf. alínea anterior. Mas os dois indivíduos especificados podem dispor-se entre eles de duas maneiras distintas. Assim sendo, o número pedido é $2 \cdot 5!$.

6. (**Exame**: 2.0 valores)

Comece-se por observar que

$$\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2.$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2,$$

com

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$

cf. Exercício 19 da Actividade Formativa 1.

7. (**Exame**: 3.50 valores)

7.1. (**Exame**: 1.70 valor; **P-fólio**[2]: 1.50 valor)
Supondo que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + by = 1,$$

[1]Pergunta 4 do P-fólio.
[2]Pergunta 5 do P-fólio.

então

$$acx + bcy = c, \quad c \in \mathbb{Z}.$$

Assim sendo, como $a \mid (ac)$, resulta da hipótese $a \mid (bc)$ que

$$a \mid \underbrace{((ac)x + (bc)y)}_{=c},$$

cf. Lema 1.1 alínea (i) do texto sobre Divisibilidade.

7.2. (**Exame**: 1.80 valor)

Suponhamos que $p \nmid a$. Então, como p é primo, $\mathrm{mdc}(p, a) = 1$. Logo, pelo Teorema 1.7 (Bachet-Bézout) existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$px + ay = 1.$$

Assim sendo, resulta da alínea anterior que

$$p \mid (ab) \implies p \mid b.$$

Um raciocínio semelhante aplica-se se se suposer que $p \nmid b$.

8. (**Exame**: 3.0 valores)

8.1. (**Exame**: 1.50 valor)

Esta alínea é equivalente a provar que 9 é um divisor de 72684. Pelo critério de divisibilidade por 9 tem-se, com efeito,

$$7 + 2 + 6 + 8 + 4 = 27,$$

com 27 divisível por 9, pelo que o número 72684 é divisível por 9.

8.2. (**Exame e P-fólio**[3]: 1.50 valor)

Como 7 é um número primo, 7 não tem outros divisores além do próprio 7 e do 1. Assim sendo, se se verificar que 72684 não é divisível por 7 podemos então concluir que $\mathrm{mdc}(72684, 7) = 1$. Neste sentido, por recurso ao critério de divisibilidade por 7 (Pergunta 4 da folha de exercícios sobre Congruências) tem-se

$$\begin{aligned} &7268 - 2 \times 4 = 7260 \\ &726 - 2 \times 0 = 726 \\ &72 - 2 \times 6 = 60 \end{aligned}$$

em que 60 não é divisível por 7 ($60 = 7 \times 8 + 4$). Deste modo conclui-se que $7 \nmid 72684$.

[3]Pergunta 6 do P-fólio.

9. (**Exame**: 5.0 valores; **P-fólio**[4]: 4.50 valores)

9.1. (**Exame**: 1.80 valor; **P-fólio**: 1.50 valor)
Case Base: $\mathbf{n = 0}$. $a_0 - b_0 = 4 - 3 = 1 = 3^0$, o que prova o caso base.
Hipótese de indução: Dado $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que

$$a_n - b_n = 3^n.$$

Tese de indução: $a_{n+1} - b_{n+1} = 3^{n+1}$.
Atendendo ao modo como as sucessões $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ estão definidas,

$$\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} - 4b_{n-1} = 0 & \quad (1) \\ b_n + 5a_{n-1} - 7b_{n-1} = 0 & \quad (2) \end{cases},$$

tem-se que

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (4b_n - 2a_n) - (7b_n - 5a_n) = 3(a_n - b_n)$$

em que, pela hipótese de indução,

$$a_n - b_n = 3^n.$$

Logo, $a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n) = 3^{n+1}$, como pretendido.
Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $a_n - b_n = 3^n$.

9.2. (**Exame**: 1.60 valor; **P-fólio**: 1.50 valor)
Pela equação (1),

$$b_{n-1} = \frac{1}{4}(a_n + 2a_{n-1})$$

que, substituindo na equação (2), conduz a

$$\frac{1}{4}(a_{n+1} + 2a_n) + 5a_{n-1} - \frac{7}{4}(a_n + 2a_{n-1}),$$

ou, equivalentemente,

$$a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1.$$

O polinómio característico associado a esta última equação é

$$p(t) = t^2 - 5t + 6$$

cujas raízes são 2 e 3. Assim sendo, tem-se que

$$a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$$

para $\alpha + \beta = a_0 = 4$. Mas, pela equação (1),

$$a_1 = 4b_0 - 2a_0 = 4 \implies 2\alpha + 3\beta = a_1 = 4.$$

Como consequência, $\alpha = 8$, $\beta = -4$ e, por conseguinte,

$$a_n = 8 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n = 2^{n+3} - 4 \cdot 3^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[4]Grupo 7 do P-fólio.

9.3. (**Exame**: 1.60 valor; **P-fólio**: 1.50 valor)

Pelas duas alíneas anteriores,

$$b_n = a_n - (a_n - b_n) = 2^{n+3} - 4 \cdot 3^n - 3^n = 2^{n+3} - 5 \cdot 3^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, seja m um divisor de a_n e de b_n. Vejamos que $m = 1$. Por linearidade,

$$m \,|\, a_n \wedge m \,|\, b_n \implies m \,|\, (\underbrace{a_n - b_n}_{=3^n})$$

Como 3 é primo, 3^n é uma factorização em números primos. Logo,

$$m \,|\, 3^n \implies \exists\, k = 0, 1, \ldots, n : m = 3^k$$

Mas por linearidade tem-se também

$$m \,|\, a_n \wedge m \,|\, b_n \implies m \,|\, (\underbrace{5a_n - 4b_n}_{=2^{n+3}}),$$

o que permite concluir por um raciocínio semelhante que $m = 2^{k'}$ para algum $k' = 0, 1, \ldots, n+3$. Assim sendo, resulta de $\mathrm{mdc}(2,3) = 1$ que $k = k' = 0$, ou seja, $m = 1$. Consequentemente, $\mathrm{mdc}(a_n, b_n) = 1$, o que é equivalente a a_n e b_n serem primos entre si.