UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21082
Matemática Finita

16 de junho de 2014

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 8 grupos de questões, contém 4 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7 e 8 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 5	**Grupo 6**	**Grupo 7**	**Grupo 8**
6.0	2.0	4.5	3.5

Nome: ....

N^0 de Estudante: .... **B. I. n^0** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sejam A e B conjuntos tais que $\mathbb{N} \subseteq A$ e $B \subseteq \mathbb{Q}$. Qual dos seguintes conjuntos é necessariamente enumerável?

☐ **a)** A.

☐ **b)** $A \times B$.

☐ **c)** $B \times \mathbb{Q}$.

☐ **d)** $\mathbb{R} \setminus A$.

2. Dados $0 \leq k < n$, a soma

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

não é igual a

☐ **a)** $\binom{n+1}{k+1}$

☐ **b)** $\binom{n}{k+1}$

☐ **c)** $\binom{n+1}{n-k}$

☐ **d)** $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

3. Relativamente à soma

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k!} \right)$$

pode dizer-se à partida que...

☐ **a)** a soma é um valor não negativo

☐ **b)** a soma é um valor não positivo

☐ **c)** a soma é um valor estritamente positivo

☐ **d)** a soma é um valor estritamente negativo

Nome: ....

N^0 de Estudante: .... **B. I. n^0** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

---

4. A soma $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 2$ é igual a

- ☐ **a)** $n^2 + 2n$
- ☐ **b)** $n^2 - 2n$
- ☐ **c)** $n^2 - n$
- ☐ **d)** $n^2 + n$

Responda às questões seguintes na folha de ponto

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5.

5.1. Determine o número de divisores positivos de 600, incluindo o 1 e o próprio 600.

5.2. De entre os divisores encontrados na alínea anterior, indique quantos são múltiplos de 3.

5.3. Entre todos os números naturais entre 1 e 600, inclusivé, determine:

5.3.1. Quantos são divisíveis por 3.

5.3.2. Quantos são divisíveis por 3 ou por 5.

6. Por recurso ao **método de indução matemática**, prove que

$$n^n \geq n!$$

7.

7.1. Mostre que

$$\frac{(k+5)!}{(k+1)!} = \frac{1}{5}\left[\frac{(k+6)!}{(k+1)!} - \frac{(k+5)!}{k!}\right].$$

7.2. Prove pelo **método telescópico** que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+5)!}{(k+1)!} = \frac{(n+6)!}{5(n+1)!} - 4!.$$

7.3. Por recurso às alíneas anteriores calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+4}{k}.$$

8. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para $a_0 = 2$ e $a_1 = 3$.

8.1. Determine o termo geral da sucessão por recurso ao **método do polinómio característico**.

8.2. Aplique o **método da perturbação** à soma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

para mostrar que $a_{n+1} = 2a_n - 1$.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**
$$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM