Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
C)	C)	D)

4. Para $X = \{-1, 1\}$, ou $X = \mathbb{Z}$, ou $X = \mathbb{R}$, considere-se a função identidade $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $x \in X$, e $g = f$. A função produto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ está então definida por $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = x^2$, $x \in X$, que não é uma função injetiva: $(f \cdot g)(-1) = 1 = (f \cdot g)(1)$.

Este exempo mostra que as afirmações A, B e C são falsas.

5. Comecemos por calcular quantos números de 7 dígitos distintos podem ser formados com os 9 algarismos de modo que os dígitos 5 e 6 fiquem sempre consecutivos. Este problema é semelhante ao exercício 13c) da Atividade Formativa 1.

Tal como nesse exercício, considere-se o 5 e o 6 como um bloco de dois elementos que podem ser permutados entre si de duas maneiras. Este bloco pode ser fixado em 6 posições possíveis. Os restantes 5 dígitos (todos distintos), de entre 7 possíveis, podem ser fixados de

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \left(= \frac{7!}{2!}\right) = 2520$$

maneiras possíveis: 7 maneiras para fixar o primeiro dígito, $7 - 1 = 6$ para fixar o segundo dígito, que tem de ser diferente do primeiro dígito, $6 - 1$ para fixar o terceiro dígito, etc.). Existe assim um total de

$$2 \cdot 6 \cdot 2520 = 30\,240$$

números de 7 dígitos distintos em que os algarismos 5 e 6 aparecem contíguos.

Por outro lado, tendo-se um total de 9 dígitos a serem distribuir por 7 posições diferentes, conclui-se de modo semelhante que existem

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \left(= \frac{9!}{2!}\right) = 181\ 440$$

números de 7 dígitos distintos formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Logo, existem

$$181\ 440 - 30\ 240 = 151\ 200$$

diferentes números de 7 dígitos distintos formados com os 9 algarismos em que os dígitos 5 e 6 nunca aparecem consecutivos.

6. Para resolver este exercício vamos utilizar o princípio da inclusão/exclusão. Para isso, definam-se o conjunto A de todas as funções $f : [n] \to [3]$ e os conjuntos

$$A_i = \{f : [n] \to [3] : i \notin f([n])\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

- No caso de uma função f do conjunto A_1, para cada $m \in [n]$ existem duas possibilidades para o valor de $f(m)$: ou $f(m) = 2$ ou $f(m) = 3$. Como o conjunto $[n]$ tem n elementos, existem assim 2^n possibilidades diferentes para definir os valores de $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. Ou seja, $\#A_1 = 2^n$.
  De modo semelhante, $\#A_2 = \#A_3 = 2^n$.
- Tem-se
  $$A_1 \cap A_2 = \{f : [n] \to [3] : 1, 2 \notin f([n])\}$$
  pelo que existe uma única função pertencente a $A_1 \cap A_2$: a função constantemente igual a 3. Analogamente, $\#(A_2 \cap A_3) = \#(A_1 \cap A_3) = 1$.
- Como o contradomínio de uma função é sempre um conjunto diferente do vazio, $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$.
- Pelo princípio da inclusão/exclusão conclui-se então que $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ é igual
  $$\begin{aligned}&\#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_3) + \\ &+ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 3 \cdot 2^n - 3.\end{aligned}$$
- Para a conclusão do exercício, resta observar que $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ é o conjunto de todas as funções $f : [n] \to [3]$ não sobrejetivas.

- Donde, o número total de funções sobrejetivas é igual a

$$\#A - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

7. **Caso base:** $n = 0$. Tem-se

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0+k}{k} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{0},$$

conforme explicado na última linha da página 39, primeira linha da página 40 do manual.

Hipótese de indução: Dado e fixado um $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n}.$$

Tese de indução:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} = \binom{2(n+1)+1}{n+1} = \binom{2n+3}{n+1}.$$

(Aqui, o n é o mesmo que se fixou na hipótese de indução.)

Passo de indução: Pela lei de Pascal e por $\binom{n}{-1} = 0$ (pág. 42 do manual),

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} + \binom{n+n+1}{n+1} \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1},\end{aligned}$$

donde, pela hipótese de indução e novamente pela lei de Pascal, a última expressão é igual a

$$\binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1} = \binom{2n+2}{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1}}_{(*)}.$$

Em relação à soma $(*)$, pela lei da simetria, pela mudança de variável $n+k \rightsquigarrow m$ e pela fórmula da adição do índice superior, obtém-se, respetivamente,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{n+1} = \sum_{m=n+1}^{2n+1} \binom{m}{n+1} = \binom{2n+2}{n+2}.$$

Logo, conclui-se dos cálculos anteriores que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} = \binom{2n+2}{n+1} + \binom{2n+2}{n+2} = \binom{2n+3}{n+2},$$

sendo a última igualdade justificada por nova aplicação da lei de Pascal.

Conclusão: Pelo princípio da indução matemática conclui-se que a igualdade do enunciado é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$.