

U.C. 21082

Matemática Finita

13 de setembro de 2017

- INSTRUÇÕES -

- O p-fólio é composto por 6 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 4, 5 e 6 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 hora e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
3.0	1.50	4.50

Nome:

Nº de Estudante: CC/BI nº

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Considere a aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{se } n \text{ par} \\ n & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$. Tem-se que:

- a) f não é injectiva, nem sobrejectiva
- b) f é injectiva, mas não é sobrejectiva
- c) f é sobrejectiva, mas não é injectiva
- d) f é bijectiva

2. Das opções seguintes indique a verdadeira:

- a) $\text{mdc}(-3, -6) = -3$
- b) $\text{mdc}(-3, -6) = -1$
- c) $\text{mdc}(-3, -6) = 1$
- d) $\text{mdc}(-3, -6) = 3$

3. Considere as duas afirmações seguintes:

(i) $\exists x \in \mathbb{Z} : 6x \equiv 1 \pmod{3}$

(ii) $\exists x \in \mathbb{Z} : 4x \equiv 1 \pmod{5}$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

- a) Ambas as afirmações são verdadeiras
- b) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa
- c) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira
- d) Ambas as afirmações são falsas

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

4. Pretende-se formar uma comissão de 8 elementos a partir de um grupo de 12 homens e de 15 mulheres. De quantas maneiras podemos formar essa comissão de modo que...

4.1. ... a comissão integre 4 homens e 4 mulheres;

4.2. ... a comissão integre pelo menos um homem.

5. **Sem utilizar o algoritmo de Euclides**, mostre que os números 72683 e 28 são primos entre si.

6. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = 8a_{n-1} - 7a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para $a_0 = 2$ e $a_1 = 20$.

6.1. Determine o termo geral da sucessão.

6.2. Por recurso ao método de substituição de diante para trás prove que $\langle a_n \rangle$ é solução da fórmula de recorrência

$$a_n = 7a_{n-1} + 6, \quad n \geq 1$$

para $a_0 = 2$.

6.3. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, 18 é um divisor de $a_n - 2$.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM