Matemática Preparatória | 21160 | Resolução

1. Calcule o valor da seguinte expressão $\sqrt{2}\times\sqrt{8}+\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{0,25}-\sqrt[3]{5^3}$.

   Resolução: $\sqrt{2}\times\sqrt{8}+\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{0,25}-\sqrt[3]{5^3}=\sqrt{16}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}-\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}}-5=4+\frac{3}{2}-\frac{5}{10}-5=4+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-5=-1+\frac{2}{2}=-1+1=0$

2. Decomponha em fatores a expressão

   $$(x-2)(x^2-9)(x^2+5x+6)$$

   de forma a que os fatores sejam polinómios de grau 1.

   Resolução: Sabemos que $(x^2-9)=(x-3)(x+3)$. Por outro lado, aplicando a fórmula resolvente temos que

   $x^2+5x+6=0\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\times6}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{4}{2}\vee x=-\frac{6}{2}\Leftrightarrow x=-2\vee x=-3.$

   Logo temos a seguinte decomposição em fatores de grau 1:

   $(x-2)(x^2-9)(x^2+5x+6)=(x-2)(x-3)(x+3)(x+2)(x+3)$

3. Seja $a\in]1,+\infty[$. Sabendo que $\log_2 a=\frac{1}{5}$ e que $b=a^\pi$, determine o valor exato da seguinte expressão:

   $$\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)+\log_a(a^{12}\times b^{100}).$$

   Resolução: Temos que $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)+\log_a(a^{12}\times b^{100})=\log_2 a^5-\log_2 8+\log_a a^{12}+\log_a b^{100}=5\times\frac{1}{5}-3\log_2 2+12\times1+100\times\log_a b=1-3+12+100\times\log_a a^\pi=10+100\pi$

4. Resolva a seguinte equação:

   $$|x+3|-|x-2|=8$$

   Resolução: Encontrando os valores de x onde os módulos presentes na expressão se anulam, podemos construir a seguinte tabela:

		-3		2	
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	0	$x+3$	5	$x+3$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	5	$-x+2$	0	$x-2$

Os pontos $x=-3$ e $x=2$ não são solução da equação pois $-5 \neq 8$ e $5 \neq 8$. Vejamos se há soluções nos intervalos $]-\infty,-3[$, $]-3,2[$ e $]2,+\infty[$.

Se $x<-3$, a equação é da forma $-x-3-(-x+2)=8 \Leftrightarrow -x-3+x-2=8 \Leftrightarrow -5=8$. Impossível.

Se $-3<x<2$, a equação é da forma $x+3-(-x+2)=8 \Leftrightarrow x+3+x-2=8 \Leftrightarrow 2x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$, fora do intervalo em análise.

Se $x>2$, a equação é da forma $x+3-(x-2)=8 \Leftrightarrow x+3-x+2=8 \Leftrightarrow 5=8$. Impossível.

Concluímos assim que a equação não tem soluções, isto é, cs=$\{\ \}$.

5. Considere a função real de variável real

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{7-x}$$

a) Determine o domínio de f.

Resolução: $D_f=\{x \in \mathbb{R} : x^2-2x-3 \geq 0 \wedge 7-x \neq 0\}$.
Aplicando a fórmula resolvente temos que $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(-3)}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$. Logo a condição $x^2-2x-3 \geq 0$ é verificada quando $x \in]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$.
A condição $7-x \neq 0$ é verificada quando $x \neq 7$.
Logo $D_f =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[\setminus \{7\} =]-\infty,-1] \cup [3,7[\cup]7,+\infty[$.

b) Averigue se f é uma função injetiva.

Resolução: Pela resolução da alínea a) verificamos que existem dois elementos $x=3$ e $x=-1$ que tornam o numerador da função nulo e portanto o valor de f nesses pontos é zero. Assim temos que existem dois elementos distintos do domínio com a mesma imagem via f e portanto, f não é injetiva.

c) Determine os zeros de f.

Resolução: Temos que $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3}=0 \wedge (7-x \neq 0) \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \wedge (7-x \neq 0) \overset{a)}{\Leftrightarrow} (x=3 \vee x=-1) \wedge (x \neq 7) \Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$.
Logo, os zeros da função são $x=-1$ e $x=3$.

6. Seja (u_n) uma progressão geométrica de razão 2, com $u_1 = \frac{1}{2}$. Calcule a soma $u_9 + u_{10} + \ldots + u_{18}$.

Resolução: Sabemos que a soma dos primeiros 18 termos de uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo $u_1 = \frac{1}{2}$ é dada por: $S_{18} = \frac{\frac{1}{2}(1-2^{18})}{1-2} = -\frac{1-262144}{2} = \frac{262143}{2}$. A este valor temos de retirar a soma dos primeiros 8 termos da progressão, ou seja, $S_8 = \frac{\frac{1}{2}(1-2^8)}{1-2} = -\frac{1-256}{2} = \frac{255}{2}$. Assim a soma pedida é $S_{18} - S_8 = \frac{262143}{2} - \frac{255}{2} = \frac{261888}{2} = 130944$.

FIM