ÁLGEBRA LINEAR I | 21002 | e-fólio B

Proposta de resolução

Esta resolução destina-se a verificar a correção do e-fólio. Não se destina a estudo ou revisão (em vez disso, use as resoluções das atividades formativas).

Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos. Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nos e-fólios.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

I. No $\mathbb{R}_2[x]$ considere os operações

$$\big(ax^2+bx+c\big)\oplus\big(dx^2+ex+f\big) := (a+d)x^2+(b+e-1)x+(c+f-2)$$

para todos $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ e

$$r\otimes\big(ax^2+bx+c\big) := (r\cdot a)x^2+(r\cdot b-r+1)x+(r\cdot c-2\cdot r+2)$$

para todos $a,b,c,r\in\mathbb{R}$. ($\cdot,+,-$ do lado direito estão as operações usuais)

Mostre que $\mathbb{R}_2[x]$ com $\oplus$ e $\otimes$ é um espaço vetorial real.

Resolução: Para evitar a utilização de demasiados parêntesis, utilizaremos a convenção de que $+,-,\cdot$ têm precedência sobre $\oplus,\otimes$.

Claramente, $ax^2+bx+c\oplus dx^2+ex+f,\ r\otimes ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$ para todos $a,b,c,d,e,f,r\in\mathbb{R}$ (porque isto é óbvio, não é necessário para uma solução correta).

Resta verificar (A_1) a (A_4) e (M_1) a (M_4). Sejam $a,b,c,d,e,f,g,h,i,r,s\in\mathbb{R}$.

(A_1): $\quad ax^2+bx+c\oplus dx^2+ex+f$

$=(a+d)x^2+(b+e-1)x+(c+f-2)$

$=(d+a)x^2+(e+b-1)x+(f+c-2)$

$=dx^2+ex+f\oplus ax^2+bx+c$

$(A_2):\quad (ax^2+bx+c\oplus dx^2+ex+f)\oplus gx^2+hx+i$

$=(a+d)x^2+(b+e-1)x+(c+f-2)\oplus gx^2+hx+i$

$=((a+d)+g)x^2+((b+e-1)+h-1)x+((c+f-2)+i-2)$

$=(a+(d+g))x^2+(b+(e+h-1)-1)x+(c+(f+i-2)-2)$

$=ax^2+bx+c\oplus(d+g)x^2+(e+h-1)x+(f+i-2)$

$=ax^2+bx+c\oplus(dx^2+ex+f\oplus gx^2+hx+i)$

(A_3): $ax^2+bx+c\oplus x+2$

$= (a+0)x^2 + (b+1-1)x + (c+2-2)$

$= ax^2 + bx + c,$

e $x + 2 \oplus ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c$ (por cause de (A_1)). Portanto, $x + 2$ é o vetor nulo.

(A_4): $ax^2 + bx + c \oplus (-a)x^2 + (2-b)x + (4-c)$

$= (a + (-a))x^2 + (b + (2-b) - 1)x + (c + (4-c) - 2)$

$= x + 2$

e $(-a)x^2 + (2-b)x + (4-c) \oplus ax^2 + bx + c = x + 2$ (por causa de (A_1)). Portanto $(-a)x^2 + (2-b)x + (4-c) = \ominus(ax^2 + bx + c)$ (onde usamos $\ominus$ em vez de $-$ para o negativo da operação $\oplus$).

(M_1): $\quad r \otimes (ax^2 + bx + c \oplus dx^2 + ex + f))$

$= r \otimes (a+d)x^2 + (b+e-1)x + (c+f-2)$

$= (r \cdot (a+d))x^2 + (r \cdot (b+e-1) - r + 1)x + (r \cdot (c+f-2) - 2 \cdot r + 2)$

$= (r \cdot a + r \cdot d))x^2 + (r \cdot b + r \cdot e - r - r + 1)x + (r \cdot c + r \cdot f - 2 \cdot r - 2 \cdot r + 2)$

$= (r \cdot a + r \cdot d))x^2 + ((r \cdot b - r + 1) + (r \cdot e - r + 1) - 1)x + ((r \cdot c - 2 \cdot r - 2) + (r \cdot f - 2 \cdot r + 2) - 2)$

$= (r \cdot a)x^2 + (r \cdot b - r + 1)x + (r \cdot c - 2 \cdot r + 2) \oplus (r \cdot d)x^2 + (r \cdot e - r + 1)x + (r \cdot f - 2 \cdot r + 2)$

$= (r \otimes ax^2 + bx + c) \oplus (r \otimes dx^2 + ex + f)$

(M_2): $\quad (r+s) \otimes ax^2 + bx + c$

$= ((r+s) \cdot a)x^2 + ((r+s) \cdot b - (r+s) + 1)x + ((r+s) \cdot c - 2 \cdot (r+s) + 2)$

$= (r \cdot a + s \cdot a)x^2 + (r \cdot b + s \cdot b - r - s + 1)x + (r \cdot c + s \cdot c - 2 \cdot r - 2 \cdot s + 2)$

$= (r \cdot a + s \cdot a)x^2 + ((r \cdot b - r + 1) + (s \cdot b - s + 1) - 1)x + ((r \cdot c - 2 \cdot r + 2) + (s \cdot c - 2 \cdot s + 2) - 2)$

$= (r \cdot a)x^2 + (r \cdot b - r + 1)x + (r \cdot c - 2 \cdot r + 2) \oplus (s \cdot a)x^2 + (s \cdot b - s + 1)x + (s \cdot c - 2 \cdot s + 2)$

$= (r \otimes ax^2 + bx + c) \oplus (s \otimes ax^2 + bx + c)$

(M_3): $r \otimes (s \otimes (ax^2 + bx + c))$

$= r \otimes (s \cdot a)x^2 + (s \cdot b - s + 1)x + (s \cdot c - 2 \cdot s + 2)$

$= (r \cdot (s \cdot a))x^2 + (r \cdot (s \cdot b - s + 1) - r + 1)x + (r \cdot (s \cdot c - 2 \cdot s + 2) - 2 \cdot r + 2)$

$= ((r \cdot s) \cdot a))x^2 + ((r \cdot s) \cdot b - r \cdot s + r) - r + 1)x + ((r \cdot s) \cdot c - 2 \cdot r \cdot s + 2 \cdot r) - 2 \cdot r + 2)$

$= ((r \cdot s) \cdot a))x^2 + ((r \cdot s) \cdot b - (r \cdot s) + 1)x + ((r \cdot s) \cdot c - 2(\cdot r \cdot s) + 2)$

$= (rs) \otimes ax^2 + bx + c.$

(M_4): $\quad 1 \otimes ax^2 + bx + c$

$= (1 \cdot a)x^2 + (1 \cdot b - 1 + 1)x + (1 \cdot c - 2 \cdot 1 + 2)$

$= ax^2 + bx + c.$

Portanto, $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ é um espaço vetorial real.

II. Considere $S := \{ax^2 + x + (a+2) : a \in \mathbb{R}\}$

i) Mostre que S é um subsespaço de $V = (\mathbb{R}_2[x], \oplus, \otimes)$, o espaço vetorial real do grupo I.

ii) Determine justificadamente uma base de S.

Resolução: i) Claramente, $S \subseteq V$ (porque isto é óbvio, não é necessário para uma solução correta).

$x + 2 = 0x^2 + 1x + 2 \in S$, porque $2 = 0 + 2$. Portanto, o vetor nulo de V é em S.

Sejam $ax^2 + bx + c, dx^2 + ex + f \in S$, $r \in \mathbb{R}$, então $b = e = 1$, $c = a + 2, f = d + 2$. Obtemos

$(ax^2 + bx + c) \oplus (dx^2 + ex + f) = (a + d)x^2 + (b + e - 1)x + (c + f - 2)$

$= (a + d)x^2 + (1 + 1 - 1)x + ((a + 2) + (d + 2) - 2)$

$= (a + d)x^2 + x + (a + d + 2) \in S,$

e

$r \otimes (ax^2 + bx + c) = (r \cdot a)x^2 + (r \cdot b - r + 1)x + (r \cdot c - 2 \cdot r + 2)$

$= (r \cdot a)x^2 + (r \cdot 1 - r + 1)x + (r \cdot (a + 2) - 2 \cdot r + 2)$

$= (r \cdot a)x^2 + x + (r \cdot a + 2 \cdot r - 2 \cdot r + 2)$

$= (r \cdot a)x^2 + x + (r \cdot a + 2) \in S$

Pois, S é subespaçe de V.

ii) Considere $p = (-1)x^2 + x + 1 \in S$. Se $ax^2 + x + (a + 2) \in S$, então

$(-a) \otimes (-1)x^2 + x + 1$

$= ((-a) \cdot (-1))x^2 + ((-a) \cdot 1 - (-a) + 1)x + ((-a) \cdot 1 - 2 \cdot (-a) + 2)$

$= ax^2 + ((-a) \cdot x^2 + x + (a + 2).$

Portanto $\langle (p) \rangle = S$.

Se $r \otimes p = 0_V$, então $0_V = x + 2 = r \otimes p = (r \cdot (-1))x^2 + (r \cdot 1 - r + 1)x + (r \cdot 1 - 2 \cdot r + 2)$.

Do termo quadrático, obtemos $r = 0$. Portanto, (p) é lineramente independente. Pois, (p) é uma base de V.

(outras bases existem)

III. Sejam $V = (\mathbb{R}_2[x], \oplus, \otimes)$ o espaço vetorial real do grupo I, $W = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ o espaço vetorial real com as operações usuais, e $T : V \to W$ a aplicação definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + b - 1, 2c - 4) \quad \forall ax^2 + bx + c \in V.$$

i) Mostre que T é uma aplicação linear.

ii) Determine justificadamente Nuc T e $\operatorname{Im} T$.

Resolução: i) Sejam $ax^2 + bx + c, dx^2 + ex + f \in V$, então

$T(ax^2 + bx + c \oplus dx^2 + ex + f)$

$= T\left((a + d)x^2 + (b + e - 1)x + (c + f - 2)\right)$

$= ((a + d) + (b + e - 1) - 1, 2(c + f - 2) - 4)$

$= ((a + b - 1) + (d + e - 1), (2c - 4) + (2f - 4)$

$= (a + b - 1, 2c - 4) + (d + e - 1, 2f - 4)$

$= T(ax^2 + bx + c) + T(dx^2 + ex + f)$

Sejam $ax^2 + bx + c \in V$, $r \in \mathbb{R}$, então

$T(r \otimes ax^2 + bx + c)$

$= T\left((r \cdot a)x^2 + (r \cdot b - r + 1)x + (r \cdot c - 2 \cdot r + 2)\right)$

$= ((r \cdot a) + (r \cdot b - r + 1) - 1, 2(r \cdot c - 2 \cdot r + 2) - 4)$

$= (r \cdot a + r \cdot b - r, 2 \cdot r \cdot c - 4 \cdot r)$

$= r \cdot (a + b - 1, 2c - 4)$

$= r \cdot T(ax^2 + bx + c)$.

Portanto T é uma aplicação linear.

ii) O vetor nulo de W é $(0, 0)$.

$T(x^2+bx+c) = 0_W \Leftrightarrow (a+b-1, 2c-4) = (0, 0) \Leftrightarrow (b = 1-a \text{ and } c = 2)$

Portanto, $\operatorname{Nuc} T = \{ax^2 + (1 - a)x + 2 \,:\, a \in \mathbb{R}\}$.

Se $(d, e) \in W$, então $T(dx^2+x+(e/2+2)) = (d+1-2, 2(c/2+2)-4) = (d, e)$. Pois todos vetores de W são na imagem de T, e $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

Fim