Física Geral 21048

Temática 2 – uso de computadores

Atividades formativas

Índice

1. Implementação dos métodos numéricos

Considere as seguintes equações diferenciais, seus respetivos valores iniciais e intervalos de integração.

a. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^3}{t^2}$; $x(1) = 0{,}30$; $t \in [1{,}4]$

b. $\frac{dx}{dt} = e^{t \ln x}$; $x(1) = 1$; $t \in [1{,}2]$

c. $\frac{dx}{dt} + x = t^2$; $x(0) = 1$; $t \in [0{,}4]$

d. $t^3 \frac{dx}{dt} = (t+1)x^2$; $x(1) = 0{,}35$; $t \in [1{,}2]$

e. $\frac{dx}{dt} = x \cos^3(t)$; $x(0) = 2$; $t \in [0{,}3]$

f. $\frac{dx}{dt} = \mathrm{sen}(tx)$; $x(0) = 1$; $t \in [0{,}4]$

g. $\frac{dx}{dt}\frac{1}{1+3t} = \sqrt{x}$; $x(0) = 0{,}25$; $t \in [0{,}2]$

Para cada uma das equações diferenciais acima implemente computacionalmente os algoritmos de integração numérica de Euler e Heun/Previsor-Corretor (s/ iterações do corretor) e elabore um gráfico da solução obtida. Utilize o passo h e a linguagem de programação que entender.

Use ângulos em radianos nas funções seno e co-seno.

2. Física – arrasto do ar

a. Desaceleração de um veículo

O condutor de um automóvel a viaja a $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{\mathbf{i}}$ em estrada plana quando larga o pé do acelerador (seja $+x$ para a direita). A viatura desacelera acordo com a lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \sum \vec{F} = \vec{F}_R = -bv^2\,\hat{\mathbf{i}}$$

Com m a massa do automóvel e $b = \frac{1}{2}\rho C_x A$ o coeficiente de arrasto.

Integre numericamente a ED resultante para a componente $v_x(t)$, no SI, pelos métodos de Euler e Heun (com passo h à sua escolha) e compare os resultados obtidos com a solução analítica

$$v_x(t) = \frac{mv_0}{bv_0 t + m}$$

Os parâmetros e velocidade inicial devem ser definidos como variáveis globais. Valores realistas para estes serão:

- Velocidade inicial v_0: entre 50 e 120 km/h. Um pouco mais para os "aceleras".
- Densidade do ar: 1,225 kg/m^3 (à temperatura de 15 ºC).
- Massa do automóvel: entre 1000 e 1500 kg.
- Coeficiente aerodinâmico: entre 0,23 e 0,35.
- Área frontal: entre 1,8 e 2,3 m^2.

Nota: o estudante atento notará que a ED acima deveria incluir outras forças de atrito para ser completamente realista. Porém, os atritos em jogo num automóvel não são meros atritos de deslizamento (i.e. os que são dados por $f_k = \mu_k F_N$) mas sim de vários tipos diferentes e complicados (rolamento, fricção nos eixos, etc). Daí para já não se incluir esse efeito neste problema.

b. Aceleração de um avião

Calcule o tempo que um Airbus A320-200 demora a atingir a sua rapidez de descolagem de 285 km/h. Assuma que a força de resistência do ar tem a forma da alínea anterior e que a força proporcionada pelos motores é dada aproximadamente por $F(t) = \left[80 + 120\left(1 - e^{-\frac{t}{1,5}}\right)\right]$ kN. Com os *flaps* para baixo, o A320 tem arrasto $b = 22$ kg/m e uma massa de 75 ton (carga máxima). Utilize unidades SI.

Bónus: calcular o comprimento de pista necessário para a descolagem, integrando a equação diferencial de 2ª ordem, *vulgus* 2ª lei de Newton, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$.

c. Projétil em movimento vertical – caso geral

A equação diferencial (7) do texto de apoio 2 (p.5) assume que o objeto é largado sem velocidade inicial. A expressão assume que a força de resistência do ar aponta sempre para cima. Ora isto nem sempre é verdade: se lançarmos uma pedra na vertical para cima, enquanto ela estiver a subir, $\vec{F}_R$ aponta para baixo. Para resolver o caso de projéteis que possam mudar de sentido de movimento, há que alterar a ED (7). A alteração é simplesmente

$$\frac{dv}{dt} = -\text{sgn}(v)\frac{b}{m}v^2 - g \quad ; \quad \text{sgn}(v) = \begin{cases} -1 & \text{se } v < 0 \\ +1 & \text{se } v \geq 0 \end{cases}$$

Notar que nesta ED v é a componente vertical da velocidade (i.e. $v = v_y(t)$) e que se subentende um referencial com $+y$ para cima. A função $\text{sgn}(v)$ tem o nome usual de "função sinal".

Integre numericamente a ED acima e teste-a para vários valores da velocidade inicial.

3. Física – oscilador amortecido

O oscilador harmónico apresentado como exemplo de ED de 2ª ordem é um sistema pouco realista em mecânica clássica. Na verdade, praticamente todos os osciladores pedem energia, seja por atrito ou por arrasto do ar.

Uma forma de modelar fisicamente este efeito é através do oscilador amortecido, cuja ED é

$$\sum F = ma \Leftrightarrow f_r + F_{elast} = m\frac{d^2x}{dt}$$

onde f_r é uma força dissipativa proporcional à velocidade, i.e. $f_r = -bv = -b\frac{dx}{dt}$. Colocando a ED na sua forma canónica temos

$$m\frac{d^2x}{dt} = -b\frac{dx}{dt} - kx$$

que, definindo o parâmetro de amortecimento $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$, se pode reescrever

$$\frac{d^2x}{dt} = -2\zeta\omega_0\frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x$$

sendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a frequência natural de oscilação, i.e. a frequência angular do oscilador na ausência de amortecimento.

Questão
Integre a ED acima para valores iniciais $x_0 = 1{,}0$ m e $v_0 = 0{,}0$ m/s e valores de ζ nas seguintes gamas:

$\zeta > 1$: oscilador sobreamortecido.
$\zeta = 1$: amortecimento crítico.
$\zeta < 1$: oscilador subamortecido.

Comente os gráficos obtidos.

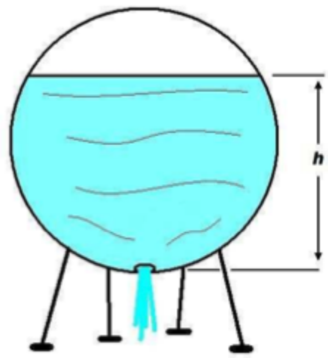
Como curiosidade, os amortecedores de um automóvel devem rondar $\zeta = 1$. Se $\zeta > 1$ a suspensão será demasiado rija e haverá muita vibração a passar ao habitáculo. Se $\zeta < 1$ a suspensão oscilará demasiado, colocando a segurança do veículo em risco. (Além de o fazer chumbar na inspeção...)

4. Problemas extra

Os problemas abaixo não têm diretamente a ver com a matéria da UC, mas são exemplos de outras situações na Física que se podem resolver com recurso a integração de equações diferenciais.

a. Esvaziamento de um reservatório

Um tanque esférico de raio $R = 1{,}5$ m escoa água por um orifício no fundo (c.f. figura), a uma taxa dada pela equação diferencial



$$\frac{dh}{dt} = -\frac{CA\sqrt{2g}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{h}(2R-h)}$$

com $h(t)$ a altura do nível de água e parâmetros $C = 0{,}55$ um pré-fator adimensional geométrico, A a área do orifício e $g = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Calcule o tempo que demora a esvaziar o tanque, como função de um valor inicial do nível de água, $h_0 = 2{,}80$ m, e de um diâmetro de orifício de 3,00 cm. (Pode deixar estes valores como parâmetros para casos mais gerais.)

b. Derretimento de uma bola de neve

Uma bola de neve de formato esférico derrete de acordo com

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{4\pi kT}{\rho L_f}\left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{\frac{2}{3}}$$

com $V(t)$ o volume da bola, $k = 3{,}00\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2.\mathrm{C}}$ um coeficiente de transferência térmica, $L_f = 3{,}35\times10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$ o calor latente de fusão da água, $\rho = 0{,}917\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ a densidade de gelo e T a temperatura ambiente (em graus Celsius). Calcule o tempo que demora uma bola de neve de 6,00 cm de diâmetro a derreter, para uma temperatura ambiente de 20,0 graus.

c. Evolução populacional

Estime a evolução populacional da humanidade até 2050, admitindo que esta é dada por um modelo logístico de equação diferencial

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1-\frac{p}{p_{max}}\right)$$

com $p(t)$ a população em função do tempo, $k = 0{,}026\ \mathrm{ano}^{-1}$ a capacidade de crescimento em condições ideais e $p_{max} = 10^{10}$ a população máxima da Terra estimada (*carrying capacity*). Para valor inicial, é sabido que a Terra suportava $2{,}555\times10^9$ habitantes em 1950.

d. Pêndulo com arrasto do ar

A equação diferencial abaixo descreve o movimento de um pêndulo sujeito a resistência quadrática do ar, no limite em que as oscilações são pequenas.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{mL}\theta - \frac{bL}{m}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

em que $\theta(t), m, L, b$ são respetivamente o ângulo em relação à vertical; a massa do pêndulo; o comprimento do fio que o prende ao teto; e um coeficiente aerodinâmico.

Integre esta equação diferencial para valores dos parâmetros e passos à sua escolha.