15. Pontos Médios

Sabemos que se A, B são dois pontos num eixo com coordenadas x e y, respectivamente, então o ponto médio M do segmento $[AB]$ tem coordenada $m = \frac{x+y}{2}$. No caso de pontos do plano temos:

Dados dois pontos $A(4,2)$ e $B(-2,4)$, o ponto médio M é dado pela média das coordenadas em x e pela média das coordenadas em y, ou seja,

$$M = \left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (1,3).$$

Em geral, o ponto médio de $A(a_1,a_2)$ e $B(b_1,b_2)$ é dado por

$$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

Aplicação 22. Prove que o ponto médio de $A(0,0)$ e $B(2,2)$ é $M(1,1)$.

Resolução. O ponto médio M é dado por

$$M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1,1).$$

Exercício 25. Encontre o ponto médio dos seguintes pontos:

a) $A(-1,-1)$ e $B(-4,-4)$

b) $A(-3,-3)$ e $B(3,3)$.

c) $A(2,4)$ e $B(4,2)$.

Exercício 26. Prove que o ponto médio de $A(a,b)$ e $B(a',b')$ é colinear com A e B.

Aplicação 23. Sabendo que o ponto médio entre $A(1,3)$ e B é $M(4,-2)$, determine B.

Resolução. Seja $B(a,b)$. Pela definição de ponto médio temos $4 = (a+1)/2$ e $-2 = (b+3)/2$. Daqui resulta $8 = a+1$ e $-4 = b+3$, ou seja, $a = 7$ e $b = -7$. $M(4,2)$ é o ponto médio do segmento de extremos am $A(1,3)$ e $B(7,-7)$.

Exercício 27. Sendo M o ponto médio de AB, determine B nos seguintes casos:

a) $A(4,2)$ e $M(0,0)$

b) $A(1,2)$ e $M(5,-1)$

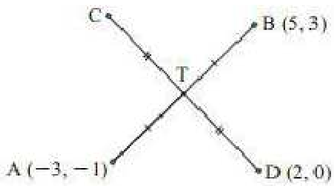
c) $A(0,1)$ e $M(0,3)$

Exercício 28.

a) Sendo AB o diâmetro de uma circunferência de centro C, determine C sabendo que $A(1,3)$ e $B(-1,-2)$.

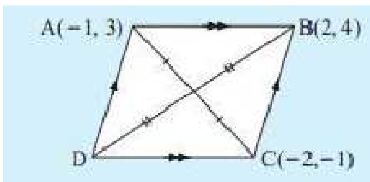
b) Sendo AB o diâmetro de uma circunferência de centro $C(1,-1)$, determine B sabendo que $A(-1,3)$ e B são um diâmetro.

c) Na figura seguinte determine as coordenadas de C.



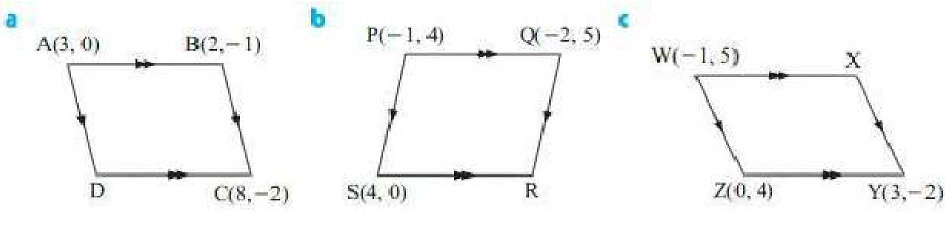
d) Seja ABC um triângulo de vertices $A(1,0)$, $B(0,3)$ e $C(2,4)$. Determine o comprimento do segmento AM sabendo que M é o ponto médio de BC.

Aplicação 24. Use o ponto médio para determinar as coordenadas do ponto em falta no paralelogramo seguinte.



Resolução. Como a figura é um paralelogramo, isto significa que o ponto de intersecção das diagonais é o ponto médio de cada uma delas. Como o ponto médio de AC é $M(-3/2, 1)$, resta encontrar D sabendo que M é o ponto médio de $B(2,4)$ e D. Usando as técnicas já aprendidas concluímos que $D(-5,2)$.

Exercício 29. Indique as coordenadas do vértice em falta nos seguintes paralelogramos.



16. Linhas Horizontais e Verticais

- As linhas verticais correspondem a conjuntos de pontos com a mesma abcissa. Por exemplo, a linha vertical que passa no ponto $(5,0)$ é
$$\{(5,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$
A equação desta recta é $x = 5$.

- As linhas horizontais são da forma $y = c$ (onde c é uma constante). Por exemplo, a linha horizontal que passa no ponto $(1,3)$ é a linha $y = 3$.

Exercício 30.

a) Indique a equação das rectas horizontais que passam no ponto:

(i) $(3,2)$

(ii) $(-1,-1)$

(iii) $(0,0)$

b) Indique a equação das rectas verticais que passam no ponto:

(i) $(3,2)$

(ii) $(-1,-1)$

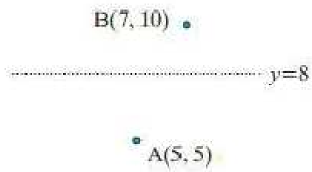
(iii) $(0,0)$

Aplicação 25. Suponha que tem duas fábricas A e B com coordenadas $A(1,0)$ e B é $M(-1,3)$. Suponha ainda que existe uma auto-estrada de equação $x = 10$. Diga onde deve ser colcoada a entrada da auto-estrada para que a distância às duas fábricas seja igual.

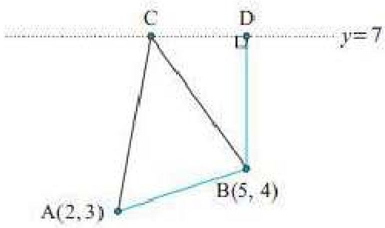
Resolução. Vamos representar a entrada na auto-estrada por C. Como C está na recta $x = 10$, temos $C(10,a)$. E queremos que a distância de A a C seja igual à distância de C a B. Assim
$$\sqrt{(10-1)^2 + a^2} = \sqrt{(10+1)^2 + (a-3)^2}.$$
Agora, elevando ambos os membros ao quadrado, $9^2 + a^2 = 121 + (a-3)^2$. Ou seja, $81 + a^2 = 121 + a^2 - 6a + 9$. Daqui resulta $6a = 130 - 81$ e bem assim $a = 49/6$ que é aproximadamente 8. Portanto, C poderia ter coordenadas $C(10,8)$.

Exercício 31.

a) A figura seguinte mostra a localização de duas casas e uma conduta de água para abastecimento dos bombeiros. Diga onde deve ser colocada a boca de incêndios para que a distância às duas casas seja igual.



b) Na figura seguinte, A e B são duas casas e CD é uma linha de alta tensão. É necessário fazer um posto de electricidade para abastecer as duas cidades.



(i) Como são as cidades a pagar a linha, querem que o seu custo seja igual para as duas. Diga onde deve o posto de abastecimento ser colocado.

(ii) Investigue se seria uma melhor solução colocar o posto em D e alimentar A a partir de B.

17. Equações das Rectas

Consideremos o seguinte conjunto de pontos do plano cartesiano:

$$\{(x, 3x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos verificar se estes pontos são todos colineares. Suponhamos que temos três pontos $A(a, 3a+1)$, $B(b, 3b+1)$ e $C(c, 3c+1)$, e vamos ver quais os declives das linhas que incidem com AB e com BC. Para AB temos

$$m_{AB} = \frac{3b+1-(3a+1)}{b-a} = \frac{3b+1-3a-1}{b-a} = \frac{3b-3a}{b-a} = 3\frac{b-a}{b-a} = 3.$$

Analogamente,

$$m_{BC} = \frac{3c+1-(3b+1)}{c-b} = \frac{3c+1-3b-1}{c-b} = \frac{3c-3b}{c-b} = 3\frac{c-b}{c-b} = 3.$$

Como os três pontos são colineares, está provado que pertencem a uma mesma linha. Uma vez que os três pontos eram arbitrários no conjunto $\{(x, 3x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, concluímos que todos os pontos deste conjunto são colineares.

A mesma argumentação poderia ser feita com o conjunto $\{(x, mx+b) \mid x \in \mathbb{R}\}$, para certos reais m e b. Portanto, a nossa primeira conclusão é que a seguinte equação define uma recta:

$$\boxed{y = mx + b.}$$

E reciprocamente, será que todas as linhas (com excepção das verticais que são da forma $x = c$), podem ser escritas na forma $y = mx + b$?

A questão resume-se a saber se conseguimos descobrir quais são os valores m e b de uma recta dada. Vejamos então. Se em $y = mx + b$ fizermos $x = 0$, temos que $y = m \times 0 + b = b$. Assim concluímos que $(0, b)$ é um ponto da recta, ou seja, b é o valor no qual a recta corta o eixo dos yy. Nestes termos, se uma dada recta corta o eixos dos yy no ponto -3, então sabemos que a sua equaçao vai ser $y = mx - 3$.

Vamos agora ver qual é o declive da recta $y = mx + b$. Para isso temos de encontrar dois pontos da recta e calcular o declive da forma habitual. Para encontrarmos dois pontos damos (arbitrariamente) valores a x. Pode ser, por exemplo, $x = 0$ e $x = 1$, o que dá os pontos $(0, m\times 0+b) = (0, b)$ e $(1, m\times 1+b) = (1, m + b)$. O declive da recta que passa nestes dois pontos é

$$\frac{m+b-b}{1-0} = \frac{m}{1} = m.$$

Ou seja, na equação

$$y = mx + b,$$

- o valor b é o ponto no qual a recta corta o eixo dos yy,
- m é o declive da recta.

Portanto, dada uma recta qualquer (desde que não seja vertical), basta-nos procurar o ponto no qual ela corta o eixo dos yy e encontrar o declive para conseguir escrever a sua equação na forma $y = mx+b$. Está provado que $y = mx + b$ define um conjunto de pontos colineares (uma recta, portanto) e está provado que toda a recta (excepto as verticais) pode ser escrita na forma $y = mx + b$.

Exercício 32. Indique a equação das recta tal que:

a) corta o eixo dos yy no ponto 3 com declive 2

b) corta o eixo dos yy no ponto -1 com declive $1/2$

c) corta o eixo dos yy no ponto π com declive $\sqrt{3}/2$

Aplicação 26. Diga qual a equação da recta que passa no ponto $(2, 3)$ com declive $1/2$.

Resolução. Neste caso não temos o ponto no qual a recta corta o eixo dos yy. Para encontrar a equação da recta faz-se assim. Seja (x, y) um ponto qualquer dessa recta. Como a recta passa em $(2, 3)$ com declive $1/2$, isto significa, pela definição de declive, que

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{1}{2}.$$

Daqui resulta $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$, ou seja,

$$y = \frac{x}{2} + 2.$$

A equação da recta que passa pelo ponto $(2, 3)$ com declive $1/2$ é a recta $y = x/2 + 2$, ou seja, a recta de declive $1/2$ e que corta o eixo dos yy no ponto 2.

Em geral a equação que passa no ponto (a, b) com declive m é dada por

$$\frac{y-b}{x-a} = m$$

donde resulta $(y - b) = m(x - a)$ e bem assim

$$y = mx + (b - ma).$$

Exercício 33. Indique a equação das recta tal que:

a) passa em $(1, 0)$ com declive -1

b) passa em $(-1, \pi)$ com declive $1/2$

c) passa em $(-1, 1)$ com declive -2

Aplicação 27. Diga qual a equação da recta que passa nos pontos $(2, 3)$ e $(3, -1)$.

Resolução. Neste caso não temos o declive, mas podemos determiná-lo rapidamente. De facto temos

$$m = \frac{-1-3}{3-2} = -4$$

Agora basta determinar a recta que passa pelo ponto $(2, 3)$ com declive -4:

$$y = -4x + (3 - (-4) \times 2) = -4x + 12.$$

Exercício 34. Indique a equação das recta tal que:

a) passa nos pontos $(1, 0)$ e $(0, -1)$

b) passa nos pontos $(-1, 3)$ e $(-3, 5)$

c) passa nos pontos $(10, \pi)$ e $(\pi^2, 3)$

Aplicação 28. Diga se o ponto $A(3, -2)$ pertence à recta de equação $y = 2x - 8$.

Resolução. O ponto $A(3, -2)$ pertencerá à linha se e só se satisfizer a equação $y = 2x - 8$. Vamos então ver. Sendo $x = 3$, temos

$$2 \times x - 8 = 2 \times 3 - 8 = 6 - 8 = -2.$$

Está provado que o ponto $A(3, -2)$ é um ponto da forma $(x, 2x - 8)$ e portanto pertence à linha dada.

Exercício 35. Indique se os pontos seguintes pertencem às rectas indicadas:

a) $(10, 0)$ e $y = 0$

b) $(-1, 3)$ e $x = -1$

c) $(-1, 2)$ e $y = -1$

d) $(4, 5)$ e $y = x + 1$.

e) $(3, 3)$ e $y = x$

f) $(4,3)$ e $y=-x+1$.

Exercício 36. Determine k de forma a que os pontos seguintes pertençam às rectas indicadas:

a) $(k,1)$ e $y=1$

b) $(0,4)$ e $x=k$

c) $(-3,-2)$ e $y=kx+1$

d) $(0,-1)$ e $y=x+k$.

e) (k,k) e $y=kx+k$

f) $(k,2k)$ e $y=kx+1$.

Aplicação 29. Diga em que ponto se intersectam (no caso de haver algum) as linhas de equação $y=2x-1$ e $y=-x+4$.

Resolução. Uma vez que as rectas têm declive 2 e -1, respectivamente, elas não são paralelas. Consequentemente vão ter um ponto comum. Que onto será esse? Vai ser um ponto que simultaneamente pertence a $y=2x-1$ e $y=-x+4$. Como se determina esse ponto? Resolvendo o sistema de equações, o que dá $x=5/2$ e $y=7/3$. Portanto, o ponto de intersecção das linhas de equação $y=2x-1$ e $y=-x+4$ é o ponto $(5/2,7/3)$.

Exercício 37. Encontre o ponto de intersecção das seguintes rectas (antes de resolver desenhe as duas rectas de forma aproximada para poder criticar o seu resultado):

a) $y=x$ e $y=-x$

b) $y=x+1$ e $y=-3x+2$

c) $y=0$ e $x=-1$

d) $2y=-3x-1$ e $y=x+1$.

e) $y=-1$ e $y=x$

f) $y=2x$ e $y=-x+1$.

Aplicação 30. Considere os pontos $A(-1,2)$ e $B(3,4)$. Determine a equação da recta perpendicular a AB e que passa pelo ponto médio de AB.

Resolução. Para resolver este problema temos de:

a) Calcular o ponto médio

b) Calcular o declive da perpendicular a AB

c) Determinar a equação da recta pedida.

Como já vimos, o ponto médio M é dado por

$$M = (\frac{-1+3}{2}, \frac{2+4}{2}) = (1,3).$$

O declive da recta AB é

$$m = \frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Consequentemente, o declive da perpendicular será o recíproco negativo, ou seja, -2.

Finalmente, resta escrever a recta da equação que passa pelo ponto $(1,3)$ com declive -2. Como já vimos acima, essa recta é dada por

$$\frac{y-3}{x-1} = -2,$$

de onde resulta $y = -2x + 5$. É esta a perpendicular a AB que passa pelo ponto médio de AB.

Exercício 38. A perpendicula ao ponto médio de AB sendo:

a) $A(1,2)$ e $B(2,1)$

b) $A(-1,2)$ e $B(-2,1)$

c) $A(0,0)$ e $B(2,2)$

d) $A(10,\pi)$ e $B(1,4)$.