U.C. 21175
Análise Infinitesimal

12 de fevereiro de 2019 - proposta de resolução

1. Determine a família de primitivas das seguintes funções reais de variável real:

(a) $\dfrac{\cos(2x)}{7} - x + e^{-2x}$
Temos

$$\int \left(\frac{\cos(2x)}{7} - x + e^{-2x}\right) dx = \int \left(\frac{\cos(2x)}{7}\right) dx + \int (-x)\, dx + \int \left(e^{-2x}\right) dx =$$

$$\frac{\sin(2x)}{14} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) $x^2 \cos(4x)$
Fazendo integração por partes temos

$$\int \left(x^2 \cos(4x)\right) dx = \frac{\sin(4x)}{4}x^2 - \int \left(\frac{\sin(4x)}{4}2x\right) dx = \frac{\sin(4x)}{4}x^2 - \int \left(\frac{\sin(4x)}{2}x\right) dx.$$

Fazendo novamente integração por partes, temos

$$\int \left(\frac{\sin(4x)}{2}x\right) dx = -\frac{\cos(4x)}{8}x - \int \left(-\frac{\cos(4x)}{8}\right) dx = -\frac{\cos(4x)}{8}x + \frac{\sin(4x)}{32}.$$

Assim,

$$\int \left(x^2 \cos(4x)\right) dx = \frac{\sin(4x)}{4}x^2 - \left(-\frac{\cos(4x)}{8}x + \frac{\sin(4x)}{32}\right) =$$

$$\frac{\sin(4x)}{4}x^2 + \frac{\cos(4x)}{8}x - \frac{\sin(4x)}{32} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. Calcule a área do conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cujas coordenadas satisfazem as seguintes condições

$$1 \leq x \leq 3, \qquad 0 \leq y \leq \cos(3x) + 2(e^{-x} + x).$$

A área pretendida é dada por

$$\int_1^3 \left(\cos(3x) + 2(e^{-x} + x)\right) dx.$$

Calculemos uma primitiva da função integranda

$$F(x) := \int \left(\cos(3x) + 2(e^{-x} + x)\right) dx = \frac{\sin(3x)}{3} - 2e^{-x} + x^2.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\int_1^3 \left(\cos(3x) + 2(e^{-x} + x)\right) dx = F(3) - F(1) = \frac{\sin(9)}{3} - 2e^{-3} + 9 - \left(\frac{\sin(3)}{3} - 2e^{-1} + 1\right) =$$

$$\frac{\sin(9) - \sin(3)}{3} - 2e^{-3} + 2e^{-1} + 8.$$

3. Prove que existe $\rho \in [1, 5]$ tal que

$$\int_1^5 \cos(e^x)dx = 4\cos(e^\rho).$$

A função $\cos(e^x)$ é contínua em $[1, 5]$, pois resulta da composição das funções exponencial e cosseno que são ambas contínuas nesse intervalo. Assim, é válido o teorema do valor médio para integrais que garante a existência de $\rho \in [1, 5]$ tal que

$$\frac{1}{5-1}\int_1^5 \cos(e^x)dx = \cos(e^\rho),$$

ou seja,

$$\int_1^5 \cos(e^x)dx = 4\cos(e^\rho),$$

como pretendíamos provar.