ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve Resolução

Grupo I.

Q1. Usando a primeira linha da matriz obtemos $\det A = 0$, e portanto a matriz nunca é invertível. Tem-se $\det(4A) = 4^3 \det A = 0 = 3\det A$. A opção correcta é c).

Q2. Tem-se $(f \circ g)(x, y, z) = f(x, y) = (x, y, x)$ e $(g \circ f)(x, y) = g(x, y, x) = (x, y)$, portanto $g \circ f$ é a identidade em $\mathbb{R}^2$ e o seu núcleo é o vetor nulo; o núcleo de f é o vetor nulo. O núcleo de $f \circ g$ é gerado pelo vetor $(1, 0, 0)$. A opção correcta é c).

Q3. $\det(-A) = (-1)^3 \det A = 1$ e $(\det A)B = (-1)B = -B$. Em geral não é possível dizer nada sobre a matriz $A + B$, apenas que é uma matriz 3×3. A opção correcta é b).

Q4. Os dois vetores que geram F são linearmente independentes (porquê?) e portanto F tem dimensão 2. Esses vetores também pertencem a G. O subespaço G é gerado pelos vetores linearmente independentes $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ e portanto $\dim G = 2$. Assim os geradores de F constituem uma base de G, ou seja $F = G$. A opção correcta é c).

Grupo II.

a) Se A é diagonalizável então existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = \Lambda$, sendo Λ uma matriz diagonal. Portanto $A = P\Lambda P^{-1}$ e $A^2 = P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$, e se $A^2 = 0$ então $0 = P\Lambda^2 P^{-1}$ e portanto também $\Lambda^2 = 0$. Mas como Λ^2 é uma matriz diagonal também $\Lambda = 0$, o que implica que $A = P\Lambda P^{-1} = 0$. A afirmação é verdadeira.

b) A aplicação linear $T(x, y) = (y, 0)$ satisfaz a condição $\operatorname{Nuc} T = \operatorname{Im} T$, e portanto a afirmação é verdadeira.

Grupo III. Utilizando o método de eliminação de Gauss concluímos que o sistema tem uma única solução $(x, y, z) = (4, -3, 2)$.

Grupo IV.

a) Usando a primeira linha obtemos $\det(A - \lambda I_4) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2$, e portanto os valores próprios são ± 1, ambos com multiplicidade algébrica 2.

b) O espaço próprio associado ao valor próprio -1 corresponde às soluções de $x = -w$ e $y = z$ em $\mathbb{R}^4$, e é gerado pelos vetores linearmente independentes (porquê?) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. O espaço próprio associado ao valor próprio $+1$ corresponde às soluções de $x = w$ e $y = -z$ em $\mathbb{R}^4$, e é gerado pelos vetores linearmente independentes $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) Cada um dos valores próprios tem multiplicidade geométrica 2 e portanto a soma das multiplicidades geométricas é 2+2=4, que é igual à ordem da matriz A. Logo a matriz é diagonalizável, ou seja existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

d) A matriz P tem por colunas os vetores próprios de A, para $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ podemos escolher por exemplo $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. O facto de os vetores próprios serem linearmente independentes em $\mathbb{R}^4$ garante que P é invertível.

V.

a) T está bem definida como aplicação linear pois é definida à custa da imagem de 4 matrizes que formam uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Com a habitual identificação entre $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^4$, a matriz A que representa T tem por colunas as imagens dos vetores da base canónica $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Tem-se $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \\ c \\ b \\ -a \end{bmatrix}$ e portanto $T(B) = 0$ se e só se $B = 0$.

d) Uma vez que o núcleo de T é o subespaço nulo, a dimensão da imagem de T é igual à dimensão de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que é 4.

e) T é injetiva porque o seu núcleo se reduz ao vetor nulo, e é sobrejetiva pois a sua imagem é o espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ todo.

f) T é invertível pois é injetiva, e podemos calcular a inversa de T, usando A^{-1}, ou reparar que por linearidade de T^{-1} se tem

$$T^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -T^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + T^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + T^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - T^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

VI. Os valores próprios da matriz A são 0 e ± 1. Portanto existem vetores u e v não nulos tais que $Au = 0 \cdot u = 0$ e $Av = 1 \cdot v = v$. Logo $A(u + v) = Au + Av = 0 + v = v$.

FIM