e-Fólio A

Nome: ....

B.I./C.C.: .... **Nº de Estudante:** ....

Licenciatura: .... **Turma:** ....

Unidade Curricular: Álgebra Linear I **Código:** 21002

Data: .... **Ano Letivo:** 2012/2013

Docente: Rafael Sasportes **Classificação:** ....

Para a resolução do **e-Fólio A**, aconselha-se que:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 6 grupos de questões, num total de 3 páginas e termina com a palavra FIM. As *suas respostas* às questões deste e-Fólio não podem ultrapassar **nove** páginas A4; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva sempre com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato *pdf*), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio A" até ao dia 3 de dezembro.

Critérios de avaliação e cotação:

- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**.
- Exceto nas questões de escolha múltipla, justifique *cuidadosa e detalhadamente* todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.
- Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a VI têm cotação de 0.6 valores cada.

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Então:

☐ **a)** $AA^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $CA = A^2$.

☐ **c)** $AB = BA$.

☐ **d)** $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Considere a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O sistema de equações que corresponde a esta matriz é:

☐ **a)** $\begin{cases} -2x + 3y - z + w = 3 \\ -5x + 4y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

☐ **b)** $\begin{cases} -2x + 3y + z = 3 \\ -5x + 4y = 1 \\ w = 0 \end{cases}$

☐ **c)** $\begin{cases} -2x + 3y - z = 3 \\ -5x + 4y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

☐ **d)** $\begin{cases} -2x + 3y - z = 3 \\ 5x = 4y \\ x = 0 \end{cases}$

3. Duas matrizes A e B pertencentes a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dizem-se *semelhantes* se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$.
Se A e B são matrizes semelhantes, então:

☐ **a)** $A^2 = B^2$

☐ **b)** $\det(A^2) = \det(B^2)$

☐ **c)** $A - B = I_n$

☐ **d)** $\det A = -\det B$

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então:

☐ **a)** $\operatorname{tr} A = 3$

☐ **b)** $3 + \operatorname{tr} A = \det A$

☐ **c)** $\det(-A) = -\det A$

☐ **d)** $\det(A^3) = 3\det A$

(Nota: O traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal, neste caso $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$)

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Aplicando o *Método de Eliminação de Gauss*, determine se a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, e no caso afirmativo, calcule Q^{-1} usando o *Método de Eliminação de Gauss-Jordan* aplicado à matriz $[Q|I_4]$.

III. Utilizando o *Teorema de Laplace* calcule o valor de

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV. Uma matriz quadrada diz-se uma *matriz de permutação* se cada coluna e cada linha tiverem uma entrada igual a 1 e as restantes iguais a 0.

a) Dê um exemplo de uma matriz de permutação A, 3×3, que seja diferente de I_3.

b) Verifique que dada uma matriz qualquer B, 3×3, a matriz AB procede a uma permutação das linhas de B e a matriz BA resulta de B por uma permutação das suas colunas.

c) Verifique que a matriz A é invertível, tendo por inversa a sua transposta.

V. Se $P \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ verifica $P^\top P = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$, designa-se a matriz $H = I_n - 2PP^\top$ por *matriz de Householder* associada a P.

a) (i.) Seja $P^\top = \begin{bmatrix} 1/6 & 3/4 & 5/12 & 1/4 & 5/12 \end{bmatrix}$. Calcule a matriz de Householder H, associada a P.

(ii.) Verifique que H é uma matriz simétrica, e que $H^\top H = I_5$.

b) Mostre que se H é uma matriz de Householder então H é uma matriz simétrica e $H^\top H = I_n$.

VI. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$x^\top A x = 0 \ \forall x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \iff A^\top = -A.$$

FIM