ÁLGEBRA LINEAR I | e-fólio A 2022 | resolução

Esta resolução destina-se a verificar a correção do e-fólio. Não se destina a estudo ou revisão (em vez disso, use as resoluções das atividades formativas).

Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos. Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nos e-fólios.

I. (*1 val.*) Questões de escolha múltipla.

1. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então:

☐ **a)** A^2 é definido

☐ **b)** ABC não é definido

☐ **c)** $(BC)^2$ não é invertível

☐ **d)** AB é invertível

Resolução: c.

a. é errado: $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, pois $A^2 = A \cdot A$ não é definido $(2 \neq 3)$

b. é errado: $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, pois AB é definido $(2 = 2)$ é $AB \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$. $C \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$, pois $(AB)C = ABC$ é definido $(1 = 1)$.

c. é verdadeiro: $\det(BC)^2 = (\det BC)^2 = \det\left(\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}\right)^2 = (\det 0)^2 = 0$, portanto $(BC)^2$ não é invertível.

d. é errado: $AB \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ (alinha b.). Porque AB nãe é quadrado, AB não é invertível.

2. Considere os seguintes subconjuntos dos espaços vetoriais (com suas operações padrão $+$ e $\cdot$):

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z \geqslant 0\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$
$$B = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(5) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[x],$$

$C = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \det M \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ (espaço vetorial complexo),

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 2z\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Então:

- ☐ **a)** A, B, C e D são subespaços vetoriais.
- ☐ **b)** A e C são subespaços vetoriais, B e D não são subespaços vetoriais.
- ☐ **c)** B e D são subespaços vetoriais, A e C não são subespaços vetoriais.
- ☐ **d)** D é subespaço vetorial, A, B e C não são subespaços vetoriais.

Resolução: c.

A não é subespaço: $(1, 0, 0) \in A$, mas $-1 \cdot (1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin A$.

B é subespaço: $B \subseteq \mathbf{R}[x]$ (definição de B), $x - 5 \in B$, pois B é não vazio.

Se $p, q \in B$, então $p(5) = q(5) = 0$, pois $(p + q)(5) = p(5) + q(5) = 0 + 0 = 0$, e $p + q \in B$.

Se $p \in B$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $p(5) = 0$, e $(\alpha p)(5) = \alpha(p(5)) = \alpha \cdot 0 = 0$, pois $\alpha p \in B$.

C não é subespaço: $I_2 \in C$, mas $(1 + i)I_2 \notin C$, porque $\det(1 + i)I_2 = (1 + i)^2 \det(I_2) = 2i \notin \mathbb{R}$.

D é subespaço: $D \subseteq \mathbf{R}^3$ (definição de D) e $(0, 0, 0) \in D$.

Se $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_, v_3) \in D$, então $u_1 - u_2 = 2u_3$, $v_1 - v_2 = 2v_3$, $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$. Porque $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) = 2u_3 + 2v_3 = 2(u_3 + v_3)$, temos $u + v \in D$.

Se $u = (u_1, u_2, u_3), \alpha \in \mathbb{R}$, então $u_1 - u_2 = 2u_3$, $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$ Porque $\alpha u_1 - \alpha u_2 = \alpha(u_1 - u_2) = \alpha(2u_3) = 2(\alpha_u 3)$, temos $\alpha u \in D$.

Portanto, só c. é verdadeiro.

3. Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem 4 sobre $\mathbb{C}$ tais que $\det A = 3$, $\det B = -4$ e $\det C = 2$.

Então, para todas as opções possíveis de A, B e C, temos que:

- ☐ **a)** $\det(B + C) = -2$
- ☐ **c)** $\det(A^2 B) = 12$

☐ **b)** $\det(-BC^{-1}) = -2$ ☐ **d)** $\det(I_4 - A) = -2$

Resolução: b.

a. é errado: Se $B = \operatorname{diag}(-2, 2, 1, 1)$ e $C = \operatorname{diag}(2, 1, 1, 1)$, então $\det(B + C) = \det(\operatorname{diag}(0, 3, 2, 2)) = 0 \neq -2$.

b. é verdadeiro:

$\det(-BC^{-1}) = (-1)^4 \det(B) \det(C)^{-1} = 1 \cdot (-4) \cdot \frac{1}{2} = -2$.

c. é errado: $\det(A^2B) = \det(A)^2 \det(B) = 18 \neq 12$.

d. é errado: se $A = \operatorname{diag}(1, 3, 1, 1)$, então $\det(I_4 - A) = \det(\operatorname{diag}(0, -2, 0, 0)) = 0 \neq -2$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então:

☐ **a)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema $Ax = b$ não tem solução.

☐ **b)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema $Ax = b$ tem solução única.

☐ **c)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema $Ax = b$ tem infinitas soluções.

☐ **d)** O número de soluções do sistema $Ax = b$ depende do valor de α.

Resolução: d.

d. é verdadeiro: $[A|b]$ é equivalente por linhas a

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2\alpha \\ 0 & -5 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha \end{array}\right]$$

(detalhes omitidos).

Se $\alpha \neq 0$, o sistema não tem solução (última linha). Se $\alpha = 0$ então $b = 0_{3\times 1}$, pois o sistema é homogéneo e tem a solução $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (como todo sistema homogéneo).

a.,b.,c. são errados, porque contradizem d.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. (*0.3 val.*)

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine justificadamente

i) o espaço nulo de A;

ii) uma base para o espaço das colunas de A;

iii) uma base para o espaço das linhas de A;

Resolução:

$[A|0]$ é equivalente por linhas a

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(detalhes omitidos). Portanto,

i. o espaço nulo de A é

$$\left\{\left(-\frac{x_4}{2}, 0, -\frac{x_4}{2}, x_4\right) : x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

ii. uma base para o espaço das colunas de A é

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

iii. uma base para o espaço das linhas de A é

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

(justifcações omitidas)

III. (*0.5 val.*)

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ -x + y = k \\ -kx + 2y + z = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Para cada $k \in \mathbb{R}$ determine as soluções de (1).

Resolução: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -k & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$. O sistema (1) corresponde à equação $Ax = b$. $[A|b]$ é equivalente por linhas a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & k & k+1 \\ 0 & 0 & (k-1)^2 & -k-1 \end{array}\right]$$

(detalhes omitidos).

Se $k = 1$, o sistema não tem solução (última linha).

Se $k \neq 1$, então o sistema tem uma solução unica

$z = \frac{-k-1}{(k-1)^2}$,

$y = k + 1 - \frac{k(-k-1)}{(k-1)^2} = \frac{k^3+1}{(k-1)^2}$,

$x = 1 - \frac{(-k-1)k}{(k-1)^2} = \frac{2k^2-k+1}{(k-1)^2}$.

(detalhes omitidos)

IV. (*0.6 val.*)

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $a_{ij} \in \{0, 3\}$ para cada $i, i \in \{1, \ldots, n\}$. Mostre que $\det A$ é um inteiro divisível por 3^n.

Resolução: Seja $\omega = (j_1, \ldots, j_n) \in S_n$ uma permutação. Considere $a_{1j_1}a_{2j_2} \cdot a_{nj_n}$. Este produto é 0, se um $a_{ij_i} = 0$. Casa contrário, $a_{ij_i} = 3$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, e o produto é 3^n.

Portanto, em

$$\det A = \sum_{\omega=(j_1,\ldots,j_n)\in S_n} (-1)^{\nu(\omega)} a_{1j_1}a_{2j_2} \cdot a_{nj_n}$$

cada termo é um dos $0, 3^n, -3^n$, e, pois, é divisível por 3^n. Consequentemente, $\det A$ é também divisível por 3^n.

(abordagem alternativa: use o Teorema de Laplace e indução)

V. (*1.6 val.*) No $\mathbb{R}^2$ considere os operações

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c - 2, b + d + 1)$$

para todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e

$$r \otimes (a, b) := (ra - 2r + 2, rb + r - 1)$$

para todos $a, b, r \in \mathbb{R}$. ($\cdot, +, -$ do lado direito estão as operações usuais de multiplicação, adição e subtração de números reais).

Mostre que $\mathbb{R}^2$ com $\oplus$ e $\otimes$ é um espaço vetorial real.

Resolução: Claramente, $(a, b) \oplus (c, d)$, $r \otimes (a, b) \in \mathbb{R}^2$ para todos $a, b, c, d, r \in \mathbb{R}$ (porque isto é óbvio, não é necessário para uma solução correta). Resta verificar (A_1) a (A_4) e (M_1) a (M_4). Sejam $a, b, c, d, e, f, r, s \in \mathbb{R}$.

(A_1): $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c - 2, b + d + 1) = (c + a - 2, d + b + 1) = (c, d) \oplus (a, b)$

(A_2) : $((a, b) \oplus (c, d)) \oplus (e, f) = (a + c - 2, b + d + 1) \oplus (e, f)$

$= (a+c+e-4, b+d+f+2) = ((a+(c+e-2)-2), b+(d+f+1)+1)$

$= (a, b) \oplus (c + e - 2, d + f + 1) = (a, b) \oplus ((c, d) \oplus (e, f))$

(A_3): $(a, b) \oplus (2, -1) = (a - 2 + 2, b - 1 + 1) = (a, b)$,

e $(2, -1) \oplus (a, b) = (a, b)$ (por cause de (A_1)). Portanto, $(2, -1)$ é o vetor nulo.

(A_4): $(a, b) \oplus (4 - a, -b - 2) = (2, -1)$ e $(4 - a, -b - 2) \oplus (a, b) = (2, -1)$ (por causa de (A_1)). Portanto $(4 - a, -b - 2) = -(a, b)$.

(M_1): $r \otimes ((a, b) \oplus (c, d)) = r \otimes (a + c - 2, b + d + 1)$

$= (r(a + c - 2) - 2r + 2, r(b + d + 1) + r - 1)$

$= ((ra - 2r + 2) + (rc - 2r + 2) - 2, (rb + r - 1) + (rd + r - 1) + 1)$

$= (ra-2r+2, rb+r-1) \oplus (rc-2r+1, rd+r-1) = (r \otimes (a, b)) \oplus (r \otimes (c, d))$

(M_2): $(r + s) \otimes (a, b) = ((r + s)a - 2(r + s) + 2, (r + s)b + (r + s) - 1)$

$= ((ra - 2r + 2) + (sa - 2s + 2) - 2, (rb + r - 1) + (sb + s - 1) + 1)$

$= (ra - 2r + 2, rb + r - 1) \oplus (sa - 2s + 2, sb + s - 1)$

$= (r \otimes (a, b)) \oplus (s \otimes (a, b))$

(M_3): $r \otimes (s \otimes (a, b)) = r \otimes (sa - 2s + 2, sb + s - 1)$

$= (r(sa - 2s + 2) - 2r + 2, r(sb + s - 1) + r - 1)$

$= ((rs)a - 2(rs) + 2, (rs)b + rs - 1) = (rs) \otimes (a, b)$.

(M_4): $\quad 1 \otimes (a, b) = (1a - 2 + 2, 1b - 1 + 1) = (ab)$.

Portanto, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real.

Fim