U.C. 21082
Matemática Finita

6 de junho de 2018

- Resolução e Critérios de Avaliação -

Questões de escolha múltipla

1. (Exame e P-fólio) De quantas maneiras se podem rearranjar as letras da palavra "RESTAURAR"?

☐ **a)** $9! - 3! - 2!$

☐ **b)** $\dfrac{9!}{3!}$

☐ **c)** $\dfrac{9^6}{2}$

☐ **d)** nenhuma das opções anteriores

Resposta: c)

2. (Exame e P-fólio) Seja X um conjunto finito tal que $\#X = n$ e $a \notin X$. Temos que $\#(X \times (\{a\} \cup X))$ é igual a

☐ **a)** n^2

☐ **b)** $n^2 + 1$

☐ **c)** $n^2 + n$

☐ **d)** $2n$

Resposta: c)

3. (Exame) Sejam a e b números inteiros positivos tais que $a \cdot b = 2^5 \cdot 3^3$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 2^2 \cdot 3$. Temos que $\mathrm{mmc}(a, b)$ é igual a

☐ **a)** $2^3 \cdot 3^2$

☐ **b)** $2 \cdot 3^3$

☐ **c)** $2^4 \cdot 3^3$

☐ **d)** $2^2 \cdot 3$

Resposta: a)

4. (Exame e P-fólio[1]) Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a seguinte implicação

$$\text{Se } a \equiv b \pmod n \ \text{ e } \ b \equiv 1 \pmod n \ \text{ então } \ -1 \equiv -a \pmod n$$

☐ **a)** é sempre falsa

☐ **c)** é falsa apenas para n par

[1] Questão 3 do P-fólio.

☐ **b)** é falsa apenas para n primo

☐ **d)** é sempre verdadeira

Resposta: d)

- (Exame) Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada questão incorreta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores.
- (P-fólio) Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada questão incorreta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

Responda às questões seguintes na folha de ponto

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

5. O João tem 30 livros diferentes no seu quarto. Desses 30 livros, 14 são de Física e 16 de Matemática. Sabendo que pretende doar 5 livros a uma Instituição de Solidariedade, em cada uma das seguintes situações indique quantas alternativas diferentes existem para o conjunto de livros a doar.

5.1) (Exame) Qualquer livro pode ser doado.

Resolução: É preciso escolher 5 livros a doar de entre 30 livros possíveis. O número de possibilidades é $\binom{30}{5} = \frac{30!}{5!\ 25!} = \frac{30\times29\times28\times27\times26}{5\times4\times3\times2}$.

5.2) (Exame e P-fólio[2]) Tem de doar exatamente dois livros de Matemática.

Resolução: Há $\binom{16}{2}$ maneiras diferentes de escolher 2 livros de Matemática de entre os 16 livros de Matemática que existem. Como a doação é de 5 livros, sendo exatamente 2 de Matemática, os restantes 3 têm de ser de Física, havendo $\binom{14}{3}$ maneiras diferentes de escolher 3 livros de entre os 14 de Física que existem. Logo existem $\binom{16}{2}\binom{14}{3}$ alternativas diferentes para o cojunto de livros a doar.

5.3) (Exame e P-fólio[3]) Não pode doar mais do que um livro de Física.

Resolução: Não podendo doar mais do que um livro de Física, ou bem que doa exatamente um livro de Física ou bem que não doa nenhum livro de Física. No primeiro caso, o de doar exatamente 1 livro de Física, existem $\binom{14}{1}\binom{16}{4}$ alternativas diferentes de o fazer, isto porque escolhe 1 livro de entre os 14 livros de Física e escolhe 4 livros de entre os 16 de Matemática. No segundo caso, não doando nenhum livro de Física, doará 5 livros de Matemática, havendo $\binom{16}{5}$ maneiras de o fazer, isto porque há que escolher 5 livros de entre os 16 de Matemática existentes. Assim há $\binom{14}{1}\binom{16}{4} + \binom{16}{5}$ alternativas diferentes para o conjunto de livros a doar.

Cotações: Questão 5.1 - 1.6 valores; questão 5.2 - 1.6 valores; questão 5.3 - 1.6 valores

[2] Questão 4.1 do P-fólio
[3] Questão 4.2 do P-fólio

6. (Exame) Usando o algoritmo de Euclides, calcule mdc$(300, 130)$.

Resolução: Temos que

$$\begin{array}{rcl} 300 &=& 130 \times 2 + 40 \\ 130 &=& 40 \times 3 + 10 \\ 40 &=& 10 \times 4 + 0 \end{array}$$

Logo, aplicando o algoritmo de Euclides sabemos que $mdc(300, 130) = mdc(130, 40) = mdc(40, 10) = mdc(10, 0) = 10$. Concluímos assim que $mdc(130, 40) = 10$.

Cotação: 1.5 valores.

7. (Exame e P-fólio[4]) Determine o coeficiente de x^2y^6 no desenvolvimento de $(2x - y)^8$.

Resolução: Pelo Teorema Binomial sabemos que $(2x - y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (2x)^k (-y)^{8-k} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 2^k x^k (-1)^{8-k} y^{8-k}$. Fixando $k = 2$ temos $\binom{8}{2} 2^2 x^2 (-1)^6 y^6 = \binom{8}{2}.4.x^2y^6$. Logo o coeficiente pretendido é $\binom{8}{2}.4 = \frac{8!}{2!\ 6!}.4 = \frac{8 \times 7 \times 4}{2} = 112$.

Cotação: 1.5 valores (Exame e p-fólio)

8. (Exame) Considere $10n^3 - n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

8.1) Prove, por indução matemática, que

$$3 \mid 10n^3 - n, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Resolução: Provemos o resultado $3 \mid 10n^3 - n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, usando o princípio de indução matemática.

Caso base: Provemos que o resultado é válido para $n = 1$:

Como $10 \times 1^3 - 1 = 10 - 1 = 9 = 3 \times 3$ temos que $3 | 10 \times 1^3 - 1$. Logo o resultado é válido para $n = 1$.

Passo de indução: Provemos que, para todo o $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se o resultado é válido para k então é válido para $k + 1$. Tomemos $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ arbitrário e suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado é válido para k, i.e. supomos que $3 | 10k^3 - k$. Queremos provar que $3 | 10(k + 1)^3 - (k + 1)$.

Ora, $10(k+1)^3 - (k+1) = 10(k^3+3k^2+3k+1) - (k+1) = 10k^3+30k^2+30k+10-k-1 = 10k^3 + 30k^2 + 29k + 9 = (10k^3 - k) + 3(10k^2 + 10k + 3)$. Como por hipótese de indução 3 divide a primeira parcela, i.e. $3 | 10k^3 - k$ e como 3 também divide a segunda parcela, i.e. $3 | 3(10k^2 + 10k + 3)$ temos, por linearidade, que 3 divide a soma anterior e portanto $3 | 10(k + 1)^3 - (k + 1)$.

Logo, pelo princípio de indução matemática, provámos que $3 \mid 10n^3 - n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

8.2) Prove que $10n^3 - n$ é par se e somente se n é par.

Resolução: Comecemos por provar a implicação "Se n é par então $10n^3 - n$ é par".

Tomemos n número par. Logo existe m tal que $n = 2m$. E portanto, $10n^3 - n = 10(2m)^3 - 2m = 2(10.2^2.m^3 - m)$, provando-se assim que é número par.

Resta provar a implicação "Se $10n^3 - n$ é par então n é par".

[4] Exercício 5 do P-fólio

Suponhamos que $10n^3 - n$ é número par. Mas então temos que $2|10n^3 - n$. Como $2|2$ temos que $2|2.5n^3$, ou seja $2|10n^3$. Logo por linearidade temos que $2|10n^3 - (10n^3 - n) = n$, ou seja n é número par.

Cotações: Questão 8.1 - 2 valores; questão 8.2 - 1.2 valores

9. Considere a relação de recorrência dada pela fórmula de recorrência

$$x_n = 8x_{n-1} - 15x_{n-2}, \quad n \geq 2$$

e pelas condições iniciais

$$x_0 = 1 \quad \text{e} \quad x_1 = 7.$$

9.1) (Exame e P-fólio[5]) Indique o polinómio característico da fórmula de recorrência acima e calcule as suas raízes.

Resolução: A relação de recorrência tem como polinómio característico $p(t) = t^2 - 8t + 15$. Calculando as raízes de $p(t)$ pela fórmula resolvente temos: $p(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 15}}{2 \times 1} = \frac{8 \pm 2}{2} \Leftrightarrow t = 5 \vee t = 3$. As raízes do polinómio são 3 e 5.

9.2) (Exame e P-fólio[6]) Denotando por $\langle a_n \rangle$ a sucessão solução da relação de recorrência acima, determine o seu termo geral.

Resolução: Pela alínea anterior sabemos que o termo geral tem a forma $a_n = \alpha 3^n + \beta 5^n$. Como $a_0 = 1$ e $a_1 = 7$, temos que $a_0 = \alpha + \beta = 1$ (ou seja $\alpha = 1 - \beta$) e que $a_1 = 3\alpha + 5\beta = 7$. Logo $7 = 3(1 - \beta) + 5\beta \Leftrightarrow 7 = 3 - 3\beta + 5\beta \Leftrightarrow 2\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = 2$. Logo $\alpha = 1 - 2 = -1$.

Assim, o termo geral é dado por: $a_n = -3^n + 2.5^n$.

9.3) (Exame e P-fólio[7]) Prove que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se tem que a_n e 3 são primos entre si.

Resolução: A fim de provarmos que a_n e 3 são primos entre si, provemos que $mdc(a_n, 3) = 1$. Como 3 é um número primo sabemos que $mdc(a_n, 3)$ será igual a 1 ou igual a 3. Suponhamos, com vista a absurdo, que $mdc(a_n, 3) = 3$. Mas então $3|a_n$. Logo $n \neq 0$ pois $a_0 = 1$ e 3 não divide 1. Como $3| - 3^n + 2.5^n$ e $3|3^n$ (visto $n \geq 1$) por linearidade sabemos que $3| - 3^n + 2.5^n + 3^n = 2.5^n$. Absurdo pois a fatorização em potências de números primos é única. Logo $mdc(a_n, 3) = 1$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, provando-se assim que a_n e 3 são primos entre si para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cotações: Questão 9.1 - 1.6 valores Exame, 1.4 valores P-fólio; questão 9.2 - 1.6 valores Exame, 1.4 valores P-fólio; questão 9.3 - 1.8 valores Exame, 1.5 valores P-fólio.

[5] Exercício 6.1) do P-fólio
[6] Exercício 6.2) do P-fólio
[7] Exercício 6.3) do P-fólio

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**
  $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**
  $$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**
  $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**
  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**
  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**
  $$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**
  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**
  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM
