Elementos de Análise Infinitesimal 2 | 21031

Data de Realização

2 de junho de 2022

Hora Limite de Entrega

13h00 de Portugal Continental

Tema

Todos os temas programáticos de Elementos de Análise Infinitesimal 2

Trabalho a desenvolver

Resolução dos seis grupos de exercícios constantes no enunciado.

Critérios de avaliação e cotação das perguntas

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

Justifique **muito cuidadosamente** todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. A distribuição da cotação total pelos seis grupos de questões é a seguinte: Grupo I: 2+2 val.; Grupo II: 1 val.; Grupo III: 2 val.; Grupo IV: 1+2+2+2 val.; Grupo V: 1+2 val. Grupo VI: 2+1 val.

2. Total: 20,0 valores

Normas a respeitar

Deve redigir o exame na Folha de Resolução disponibilizada e preencher todos os dados do cabeçalho.

Escreva sempre com letra legível.

As suas respostas às questões desta prova não devem ultrapassar 16 páginas A4.

Depois de ter realizado o exame produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação de Exame, segundo o exemplo apresentado: 000000exame.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo Exame até à hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Enunciado

I. Considere a função de Heaviside H, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Seja I um intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$.

a) Prove, pela definição, que H é integrável à Riemann em I.

b) Recorrendo à alínea anterior, determine o valor do integral $\int_I H(x)dx$.

II. Considere a porção do plano $\mathbb{R}^2$ definida por $\Omega = \{(x, y) \in [0, 2]^2 : xy \leqslant 1\}$. Esboce Ω e utilizando os resultados apropriados do integral de Riemann, que deve indicar explicitamente quais são, calcule a sua área.

III. Justificando cuidadosamente, determine a série de MacLaurin da função $g(x) = (x + 1)e^{-x^2}$ e esclareça qual é o seu intervalo de convergência absoluta. Aproveite o resultado que obteve para determinar o valor da derivada de ordem 17 de g na origem, $g^{(17)}(0)$.

IV. Considere a função definida por $h(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \sin(xy)$ no maior conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ no qual a expressão faça sentido.

a) Determine explicitamente $\mathcal{D}$.

b) Justifique que é possível prolongar h a todo o $\mathbb{R}^2$ de modo que função prolongada, $\widetilde{h}$, seja contínua.

c) Verifique que existem as derivadas parciais de $\widetilde{h}$ em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$.

d) Investigue a diferenciabilidade de $\widetilde{h}$ e conclua que se trata de uma função diferenciável em todo o $\mathbb{R}^2$. Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de $\widetilde{h}$ em $(0, 0, \widetilde{h}(0))$.

V. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} y^2 + w^2 - 2xz = 0 \\ x^3 + y^3 - z^3 + w^3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Prove que existe uma vizinhança do ponto $P = (1, -1, 1, 1)$ na qual soluções (x, y, z, w) de (1) podem ser escritas com x e z como funções de (y, w).

b) Sendo $x = \varphi_1(y, w)$ e $z = \varphi_2(y, w)$ as funções referidas na alínea anterior, determine a matriz jacobiana de $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ em $(-1, 1)$.

VI. Seja $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ um vetor dado e considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{x}) = \psi(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x})$, onde $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto interno dos vetores $\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbf{x}$, e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1.

a) Mostre que se ψ tiver um ponto de estacionaridade, então f tem, necessariamente, uma infinidade de pontos de estacionaridade.

b) Use o resultado da alínea anterior para estudar os extremos da função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = (y - x)^2$, começando por identificar o vetor $\boldsymbol{\alpha}$ e a função ψ.

FIM

RESOLUÇÃO

I.a)b) Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}_0^+$ um intervalo limitado e fechado. Então, como H é constante e igual a 1 em $\mathbb{R}_0^+$, qualquer que seja a decomposição de I em subintervalos $[x_k, x_{k+1}]$ tem-se sempre

$$\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} H(x) = 1 \text{ e } \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} H(x) = 1,$$

pelo que todas as somas superiores e inferiores de Darboux serão iguais e tem-se

$$\begin{aligned} S_P &= \sum_k 1(x_{k+1} - x_k) = \sum_k (x_{k+1} - x_k) \\ &= (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + (b - x_n) = b - a, \end{aligned}$$

e o mesmo para s_P. Portanto, como este resultado é independente da decomposição, conclui-se que os integrais superior e inferior são iguais, pelo que H é integrável em I e, pelo valor obtido acima, o integral é igual a $b - a$.

Exatamente o mesmo raciocínio é válido se $I \subset \mathbb{R}^-$, com a diferença que, agora, H é constante e igual a zero, pelo que, para qualquer intervalo de qualquer decomposição de I, tem-se

$$S_P = \sum_k 0(x_{k+1} - x_k) = 0,$$

e o mesmo é válido para s_P. Como estes resultados são sempre os mesmos qualquer que seja a decomposição P de I, conclui-se que a função H é integrável em I e o seu integral é igual a zero.

Seja, finalmente, $I = [a, b]$ com $a < 0 \leq b$. Considere-se uma decomposição arbitrária de I, $P = \{a, x_1, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, x_n, b\}$, com $\varepsilon_1 < 0 \leq \varepsilon_2$. As somas de Darboux são

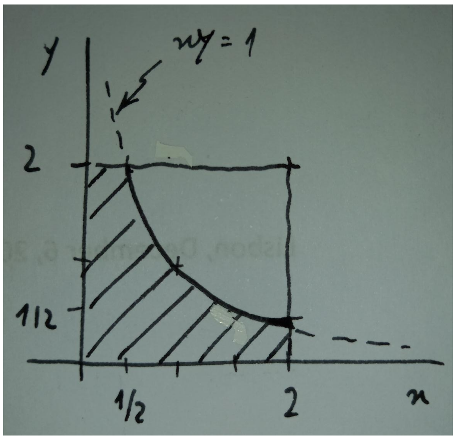
$$S_P = \sum_k \Big(\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} H(x) \Big) (x_{k+1} - x_k) = 0 + 1 \times (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (b - \varepsilon_2) = b - \varepsilon_1$$

e

$$s_P = \sum_k \Big(\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} H(x) \Big) (x_{k+1} - x_k) = 0 + 0 \times (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (b - \varepsilon_2) = b - \varepsilon_2$$

Portanto, como $\inf_{\varepsilon_1<0}(b - \varepsilon_1) = b$ e $\sup_{\varepsilon_2\geq 0}(b - \varepsilon_2) = b$, conclui-se que a função H também é integrável em $[a, b]$ quando $a < 0 \leq b$ e o seu integral é igual a b.

II. O conjunto Ω é apresentado a tracejado na figura seguinte.



Tendo em atenção que, sendo $I = [a, b]$ um intervalo limitado e fechado, a região limitada pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, não negativa e definida em I, pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, e pela eixo horizontal, tem uma área dada por $\int_a^b f$, e relembrando, também, que para qualquer $c \in]a, b[$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, pode-se concluir, atendendo ao esboço de Ω, que o valor da sua área é

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \int_0^2 \text{min}\{2, \tfrac{1}{x}\} dx \\ &= \int_0^{1/2} \text{min}\{2, \tfrac{1}{x}\} dx + \int_{1/2}^2 \text{min}\{2, \tfrac{1}{x}\} dx \\ &= \int_0^{1/2} 2dx + \int_{1/2}^2 \tfrac{1}{x} dx \\ &= 1 + \log 2 - \log \frac{1}{2} \;\; = \;\; 1 + 2\log 2. \end{aligned}$$

III. Relembrando a definição da função exponencial, a saber:

$$e^u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!},$$

onde a série é absolutamente convergente em todo o $\mathbb{R}$ e uniformemente convergente em qualquer subconjunto limitado e fechado. Consequentemente, tomando $u = -x^2$ tem-se

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+1)e^{-x^2} \\ &= (x+1)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} x^{2j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} x^{2j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} x^{2j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \end{aligned}$$

onde a_k é dado por

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2)!}, & \text{se } k \text{ é par (i.e., } k = 2j \text{ para algum } j = 0, 1, \ldots) \\ \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{((k-1)/2)!}, & \text{se } k \text{ é ímpar (i.e., } k = 2j+1 \text{ para algum } j = 0, 1, \ldots) \end{cases}$$

Pode-se observar[1] que a_k pode ser escrito como

$$a_k = \frac{(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}}{\lfloor k/2 \rfloor !},$$

onde $\lfloor m \rfloor$ é a parte inteira de m, i.e., o maior inteiro não superior a m, vindo, assim,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}}{\lfloor k/2 \rfloor !} x^k.$$

Pela definição da série de MacLaurin, sabemos que a derivada de ordem 17 na origem, $g^{(17)}(0)$, relaciona-se com os coeficentes da série através de $a_{17} = \frac{g^{(17)}(0)}{17!}$, e portanto $g^{(17)}(0) = a_{17} \times 17! = \frac{(-1)^{\lfloor 17/2 \rfloor}}{\lfloor 17/2 \rfloor !} 17! = \frac{17!}{8!}$.

IV.a) Sendo $(x, y) \mapsto xy$ um polinómio (portanto, definido em $\mathbb{R}^2$) e sendo $u \mapsto \sin u$ definida em $\mathbb{R}$, tem-se que a função composta está definida em $\mathbb{R}^2$. A função racional $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ está definida para todos os pontos que não anulam o denominador, i.e., para $x^2+y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$. Consequentemente, o seu produto está também definido para todos os pontos nessas condições, ou seja $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

[1] Mas tal *não* era necessário para a resolução integralmente correta do exercício.

IV.b) Atendendo a que $\left|\frac{\sin u}{u}\right| \leq 1, \forall u,$ pode-se escrever

$$\begin{aligned}|h(x,y)| = \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\sin(xy)\right| &= \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}|xy|\left|\frac{\sin(xy)}{xy}\right| \\ &\leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|xy| \\ &= |xy| = |x||y| = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} \\ &\leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+x^2} = x^2+y^2 \\ &= \|(x,y)\|^2\end{aligned}$$

e portanto, para qualquer $\delta > 0$, basta escolher $\varepsilon = \sqrt{\delta}$ para se concluir que $\|(x,y)\| < \varepsilon \Rightarrow |h(x,y)| < \delta$, ou seja $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0.$ Consequentemente, o prolongamento $\widetilde{h}$ de h à origem, definido por

$$\widetilde{h}(x,y) = \begin{cases} h(x,y), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua na origem. Como h é obtida pela composição e produto de funções contínuas, conclui-se que $\widetilde{h}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

IV.c) A diferenciabilidade de $\widetilde{h}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ advém do facto de h ser, como se viu, o produto de uma função racional com a composta de um seno com um polinómio, todas elas são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Consequentemente, se $(x,y) \neq (0,0)$ as derivadas parciais de h existem e podem ser calculadas pelas regras usuais do cálculo diferencial. Para a origem $(0,0)$ tem-se

$$\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{h}(x,0)-\widetilde{h}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}\sin(x\cdot 0)-0}{x} = 0$$

e

$$\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\widetilde{h}(0,y)-\widetilde{h}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}\sin(0\cdot y)-0}{y} = 0,$$

pelo que se conclui o pretendido.

IV.d) A diferenciabilidade de $\widetilde{h}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ já foi concluída no início da alínea anterior. Sobre a sua diferenciabilidade em $(0,0)$ podemos observar, atendendo às derivadas parciais calculadas na alínea anterior e aos cálculos análogos feitos na alínea IV.b), que

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\widetilde{h}(x,y)-\widetilde{h}(0,0)-\nabla\widetilde{h}(0,0)\cdot(x,y)\right|}{\|(x,y)\|} &= \frac{|\widetilde{h}(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}\frac{|\sin(xy)|}{|xy|}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|.
\end{aligned}$$

Consequentemente tem-se que o membro esquerdo converge para 0 quando $(x,y)\to(0,0)$, o que significa que $\widetilde{h}$ é diferenciável na origem.

Assim, a equação do plano tangente ao gráfico de $\widetilde{h}$ no ponto $(0,0,\widetilde{h}(0,0))$ é

$$z=\widetilde{h}(0,0)+\nabla\widetilde{h}(0,0)\cdot(x,y)=0+(0,0)\cdot(x,y),$$

ou seja,

$$z=0,\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

V.a) Seja $F_1(x,y,z,w):=y^2+w^2-2xz$ e $F_2(x,y,z,w):=x^3+y^3-z^3+w^3$. Sendo ambas funções polinomiais, $F=(F_1,F_2)$ é de classe $C^k(\mathbb{R}^2)$, para qualquer $k\in\mathbb{N}$. Como

$$F(1,-1,1,1)=\big(F_1(1,-1,1,1),F_2(1,-1,1,1)\big)=(0,0)$$

e

$$\begin{aligned}
\det\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}\bigg|_{(1,-1,1,1)} &= \det\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{bmatrix}\Bigg|_{(1,-1,1,1)} \\
&= \det\begin{bmatrix}-2z & -2x\\ 3x^2 & -3z^2\end{bmatrix}\Bigg|_{(1,-1,1,1)} \\
&= (6x^3+6z^3)\big|_{(1,-1,1,1)} = 12\neq 0,
\end{aligned}$$

conclui-se que o teorema da função implícita pode ser aplicado garantindo-se que $F(x,y,z,w)=(0,0)$ define implicitamente uma função (de classe C^k) que permite escrever (x,z) como função de (y,w), localmente em torno de $(y,w)=(-1,1)$

V.b) Pela alínea anterior e usando a notação do enunciado tem-se, para todos os (y,w) numa vizinhança suficientemente pequena de $(-1,1)$,

$$\begin{cases} y^2+w^2-2\varphi_1(y,w)\varphi_2(y,w)=0 \\ \varphi_1(y,w)^3+y^3-\varphi_2(y,w)^3+w^3=0. \end{cases} \tag{2}$$

Derivando em ordem em y vem

$$\begin{cases} 2y-2\frac{\partial\varphi_1(y,w)}{\partial y}\varphi_2(y,w)-2\varphi_1(y,w)\frac{\partial\varphi_2(y,w)}{\partial y}=0 \\ 3\varphi_1(y,w)^2\frac{\partial\varphi_1(y,w)}{\partial y}+3y^2-3\varphi_2(y,w)^2\frac{\partial\varphi_2(y,w)}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Substituindo $(y,w)=(-1,1)$ e lembrando que $\varphi_1(-1,1)=1, \varphi_2(-1,1)=1$ tem-se

$$\begin{cases} -2-2\frac{\partial\varphi_1(y,w)}{\partial y}-2\frac{\partial\varphi_2(y,w)}{\partial y}=0 \\ 3\frac{\partial\varphi_1(y,w)}{\partial y}-3-3\frac{\partial\varphi_2(y,w)}{\partial y}=0. \end{cases} \quad\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}(-1,1)=-1 \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}(-1,1)=0. \end{cases}$$

Derivando agora (2) em ordem a w tem-se

$$\begin{cases} 2w-2\frac{\partial\varphi_1(y,w)}{\partial w}\varphi_2(y,w)-2\varphi_1(y,w)\frac{\partial\varphi_2(y,w)}{\partial w}=0 \\ 3\varphi_1(y,w)^2\frac{\partial\varphi_1(y,w)}{\partial w}-3\varphi_2(y,w)^2\frac{\partial\varphi_2(y,w)}{\partial w}+3w^2=0. \end{cases}$$

e substituindo $(\varphi_1,y,\varphi_2,w)=(1,-1,1,1)$ conclui-se que

$$\begin{cases} 2-2\frac{\partial\varphi_1(y,w)}{\partial w}-2\frac{\partial\varphi_2(y,w)}{\partial w}=0 \\ 3\frac{\partial\varphi_1(y,w)}{\partial w}-3\frac{\partial\varphi_2(y,w)}{\partial w}+3=0. \end{cases} \quad\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial w}(-1,1)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial w}(-1,1)=1. \end{cases}$$

Conclui-se, portanto, que a matriz jacobiana de $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ em $(-1,1)$ é

$$D\varphi(-1,1)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

VI.a) Sendo ψ de classe C^1, também f o é, por ser a composta de ψ com a função linear (e portanto polinomial, e portanto C^1) $\mathbf{x}\mapsto\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}$. Consequentemente, para qualquer $j=1,\ldots,n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\psi'(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})=\psi'(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)=a_j\psi'(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}),$$

e portanto $\nabla f(\mathbf{x})=\psi'(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}$.

Seja agora $\beta \in \mathbb{R}$ um ponto de estacionaridade de ψ, ou seja $\psi'(\beta) = 0$. Como $\boldsymbol{\alpha}$ é um vetor não nulo existe sempre um vetor $\mathbf{x}$ tal que[2] $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x} = \beta$. Mas então, se $\mathbf{u}$ for qualquer vetor ortogonal a $\boldsymbol{\alpha}$, tem-se

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{u} = \beta + 0 = \beta,$$

e, consequentemente, $\psi'(\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{u})) = \psi'(\beta) = 0$. Portanto $\nabla f(\mathbf{x}+\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ e conclui-se que f tem uma infinidade de pontos de descontinuidade[3].

VI.b) Sendo $f(x, y) = (y - x)^2$ pode-se escrever $f(x, y) = \psi((-1, 1) \cdot (x, y))$, com $\psi(u) = u^2$. Estamos, portanto, na situação do enunciado com $\boldsymbol{\alpha} = (-1, 1) \neq \mathbf{0}$. Como sabemos que ψ tem um único mínimo, que se situa no ponto $u = 0$, e é não limitada superiormente em $\mathbb{R}$, o resultado da alínea anterior permite-nos concluir que f é uma função não limitada superiormente em $\mathbb{R}^2$ e que tem uma linha de mínimos com equação $(-1, 1)\cdot(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x$, onde a função tem o valor $f(x, y) = 0$. Pela relação $\nabla f(\mathbf{x}) = \psi'(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}$ obtida na alínea anterior, a não existência de outros pontos de estacionaridade de $\psi(u) = u^2$ para além de $u = 0$ implica que f também não tem mais extremos para além dos pontos já indicados.

[2] A construção possivelmente mais simples é a seguinte: como $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, existe pelo menos uma coordenada não nula, digamos $a_m \neq 0$. Então, o vetor $\mathbf{x} = (x_j)$ com $x_m = \beta/a_m$ e $x_j = 0$ quando $j \neq m$ satisfaz o pretendido.

[3] Relembre-se que, dado um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^n$, o conjunto de vetores que lhe são ortogonais constitui um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ com dimensão $n - 1$.