21021 – COMPUTAÇÃO NUMÉRICA

Ex 2 2013/14 de 2014/07/29

1.1 $\varepsilon = |x - \bar{x}| = 0.274528\ldots - 0.274 < 0.000529 = 5.29 \cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_{LS} = 5.29 \cdot 10^{-4}$

$r = \dfrac{\varepsilon}{|x|} < \dfrac{\varepsilon_{LS}}{|x|} < \dfrac{5.29 \cdot 10^{-4}}{0.274528} \simeq 1.9269437 \cdot 10^{-3}$

$r_{LS} = 1.93 \cdot 10^{-3}$

1.2 $\varepsilon < 5.28 \cdot 10^{-4} = 0.0528 \cdot 10^{-2} < 0.5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$ último dígito significativo está associado a 10^{-2}

$\bar{x} = 0.\underline{27}4$ tem 2 alg. significativos.

1.3 $x = 0.2745\ldots \simeq 0.275$ tem 3 alg. significativos porque todos os dígitos de uma aproximação obtida por arredondamento simétrico são significativos.

2.1 $f(x) = x - \cos x$, $f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

$f(0) = -1$, $f(1) = 0.4597$

Dado que para $x \in [0 \;\; 1]$ $f(x)$ é contínua, $f(0) \cdot f(1) < 0$ e $f'(x) > 0$, existe uma única raiz real para a equação $f(x) = 0$.

2.2 $x_k = (a_k + b_k)/2$

					Sinal		
k	a_k	x_k	b_k	$f(x_k)$	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0.6	0.7	0.8	−0.06484	−	−	+
1	0.7	0.75	0.8	0.01831	−	+	+
2	0.7	0.725	0.75	−0.0235	−	−	+
3	0.725	0.7375	0.75				

$r \simeq x_3 = 0.7375$

2.3 $\varepsilon = |r - x_K| < \dfrac{b_K - a_K}{2}$

Para $K=3$ $\quad \varepsilon < \dfrac{b_3 - a_3}{2} = \dfrac{0.75 - 0.725}{2} = 0.0125$

3.1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1 = L_1/2 \\ L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 = L_1 - L_3 \\ L_2 = L_2/4 \\ L_3 = L_3/2}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$A \times X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1/2 & 2 & -1 \\ -1/8 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

4.1

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	0.2	0.039470
2	0.4	0.15165

$$p_2(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x)$$

$f(x_0) = f(0) = 0 \Rightarrow L_0(x)$ não é necessário.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x \cdot (x-0.4)}{0.2 \cdot (-0.2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x \cdot (x-0.2)}{0.4 \cdot 0.2}$$

$$\lambda_2(x) = \frac{0.03947}{-0.04} x(x-0.4) + \frac{0.15165}{0.08} x(x-0.2)$$

$$= -0.98675\, x(x-0.4) + 1.895625\, x(x-0.2)$$