U.C. 21037

Elementos de Probabilidade e Estatística

21 de Junho de 2011

Critérios de correção e orientações de resposta – exame

Neste relatório apresentam-se os critérios e um exemplo de resolução, bem como algumas notas suplementares que pretendem clarificar métodos e indicar sugestões de correção de alguns erros que se observaram nas provas entregues pelos estudantes.

I. Considere a precipitação (em mm) caída no Porto nos anos 1997 a 2007:

Anos	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
Precipitação	162,5	149,1	101,7	46,8	403,4	157,5	332,2	126,8	9,6	62,3	53,3

Com base nos dados apresentados, responda às alíneas:

a) **(2.0 v)** Qual a média, a variância e o coeficiente de variação da precipitação no Porto nos anos em análise? Comente a dispersão que calculou em termos da sua magnitude.

b) **(2.0 v)** Construa o gráfico de dispersão. Interprete-o e diga o que pode concluir quanto à correlação entre a precipitação e o tempo.

Resolução e critérios:

a) Nesta alínea, devem constar as expressões das medidas de estatística descritiva que são pedidas (de acordo com o que consta nas folhas digitalizadas na pasta Apontamentos-***Dados Estatísticos** na página da UC*, ou outras fórmulas que sejam equivalentes); Devem ser indicados pelo menos parte dos cálculos (mesmo que realizados com recurso a calculadora), os resultados e os comentários pedidos.

Média dos *n=11* valores de precipitação é dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{(162{,}5 + 149{,}1 + ... + 62{,}3 + 53{,}3)}{11} = 145{,}93\ mm$$

A variância dos dados dá-nos um valor para a dispersão dos dados relativamente ao seu valor médio. Pode ser calculada pelas seguintes expressões equivalentes:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad ou \quad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \bar{x}^2 \ .$$

Se considerarmos a segunda expressão para fazer os cálculos temos o seguinte:

$$s^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i^{\,2} - (145{,}93)^2 = \frac{(162{,}5^2 + 149{,}1^2 + ... + 62{,}3^2 + 53{,}3^2)}{11} - (145{,}93)^2 = 13428{,}63$$

Este valor mostra uma variância muito elevada, mas, sendo um valor que resulta de parcelas elevadas quadrado, é extraindo a sua raiz quadrada e obtendo o desvio padrão que se poderá ter uma melhor ideia se os dados estão muito ou pouco dispersos em relação à média. O desvio padrão está nas unidades de medida das observações.

O **coeficiente de variação** dá-nos uma medida da dispersão dos dados relativamente à média, em termos percentuais de dispersão. $C.V.=\frac{s}{\bar{x}}$ (quociente entre o desvio padrão e a média). O C.V. é muito útil para comparar duas ou mais amostras que podem ter diferentes unidades de medida.

$$C.V.=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{13428{,}63}}{145{,}93}=\frac{115{,}89}{145{,}93}=0{,}794=79{,}4\%\,.$$

Comentário aos valores obtidos – tendo em conta a amostra inicial, vê-se que há valores bastante díspares e a variabilidade é grande. Isto confirma-se também em relação ao valor médio da precepitação. A variância é elevada, o desvio padrão é de 115,89 mm de precipitação. A percentagem de variabilidade é de 79,4%.

Outras medidas de dispersão que poderiam ser indicadas são a amplitude dos dados, A=Max-Min, e a amplitude inter-quartis.

Nota1: Quando se fala em **Variância de uma amostra,** a expressão que se pede é a anterior, denotada por S^2. O denominador é n, ou seja, o número total de observações da amostra. Quando é pedida a **Variância Corrigida**, então, o denominador passa a ser n-1, e indica-se S'^2 (lê-se *S linha ao quadrado*). A variância corrigida é então calculada por $s'^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, mas também pode ser calculada usando a primeira $s'^2=\frac{n}{n-1}s^2$.

Recorde-se que sendo a variância resultante da soma de parcelas elevadas ao quadrado, nunca pode ter um valor negativo. O mesmo acontece obviamente com o desvio padrão.

Na folha de cálculo Microsoft Excel 2007, a função estatística que calcula a variância mais comum S^2, denota-se por VARP(). A **variância corrigida** é calculada pela instrução/função VAR().

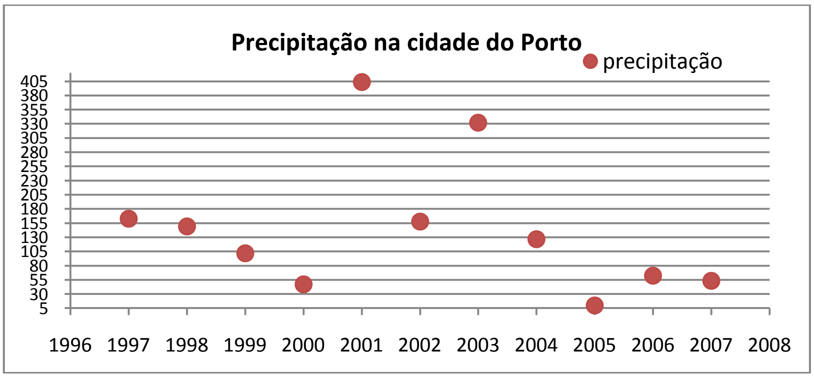
Nota2: Alguns alunos confundiram Coeficiente de Variação com coeficiente de Correlação conceito este que é totalmente distinto do primeiro.

O coeficiente de correlação é uma medida da intensidade da relação linear entre **duas variáveis**. Este coeficiente varia entre -1 (correlação negativa perfeita) e 1 (correlação positiva perfeita). Se a correlação é zero, então as variáveis não são correlacionadas.

O coeficiente de correlação linear de Pearson, o mais comum, pode ser calculado pela expressão seguinte $r=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}=\frac{\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\times y_i-\bar{x}\times\bar{y}}{S_xS_y}\ ou\ r=\frac{\sum_1^n(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_1^n(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_1^n(y_i-\bar{y})^2}}$ onde S_x e S_y são os desvios padrões de X e de Y respetivamente (Ver tópico 1.8 das folhas na página da U.C., Apontamentos-Dados Estatísticos).

b) No gráfico de dispersão é possível visualizar o comportamento dos níveis de precipitação ao longo do período de anos em causa. Observamos que os anos de 2001 e 2003 são os que têm níveis de precipitação mais elevados, 2000 e 2005 os mais baixos.

Relativamente à correlação entre a precipitação observada e o tempo, observado apenas o gráfico, não parece haver um padrão de evolução ou diminuição ao longo do tempo, ou seja, não parece haver correlação forte entre as duas variáveis, precipitação (mm) e tempo (em anos).



nota: Na resolução não é pedido o cálculo do coeficiente de correlação, mas seria possível confirmar a não existência de uma correlação linear calculando o coeficiente de correlação de Pearson, ***r***, por exemplo, que é o coeficiente mais comum. A título de exemplo, resumimos aqui os passos para o cálculo do coeficiente de correlação.

Anos-x	Precipitação-y	xi*yi
1997	162,5	324512,5
1998	149,1	297901,8
1999	101,7	203298,3
2000	46,8	93600
2001	403,4	807203,4
2002	157,5	315315
2003	332,2	665396,6
2004	126,8	254107,2
2005	9,6	19248
2006	62,3	124973,8
2007	53,3	106973,1
	soma	3212530

Média do anos e média da precipitação - $\bar{x} = 2002 \ e \ \bar{y} = 145{,}93$
Desvio padrão dos anos e da precipitação $S_x = 3{,}16 \ e \ S_y = 115{,}88$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_1^n x_i \times y_i - \bar{x} \times \bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{11} \times 3212530 - 2002 \times 145{,}93}{3{,}16 \times 115{,}88} = -0{,}2681$$

Confirma-se que a correlação fraca, pois não é muito superior a zero. Sendo o coeficiente negativo, que dizer que as variáveis crescem em sentido contrário, ou seja, a precipitação decresce com o aumento do tempo. No entanto, sendo o valor baixo, não podemos tirar esta conclusão. A correlação seria forte (muito intensa), se o coeficiente fosse superior a 0,8 em valor absoluto.

II. Uma peça é manufacturada por 3 fábricas: 1, 2 e 3. Sabe-se que a fábrica 2 produz 2,5 vezes a produção de cada uma das fábricas 1 e 3. Além disso, 3% das peças produzidas pelas fábricas 1 e 3 são defeituosas, enquanto 4 % das produzidas pela fábrica 2 são defeituosas. Todas as peças produzidas são colocadas no mesmo armazém. Tira-se uma peça ao acaso da produção global. Qual a probabilidade:

a) **(1.0 v)** De ter sido produzida na fábrica 2?
b) **(1.0 v)** Da peça ser defeituosa? (Caso não tenha resolvido a alínea a) considere que é equiprovável a probabilidade da peça ser produzida em qualquer uma das fábricas)
c) **(1.5 v)** De ter sido produzida na fábrica 1, sabendo que a peça retirada é defeituosa? (caso não tenha resolvido a alínea anterior considere igual o valor 0,03 para a probabilidade solicitada)

Resolução e critérios

a) O problema apresentado insere-se no cálculo de probabilidades sobre acontecimentos que ocorrem num universo, incluindo as probabilidades condicionais.
Para ter uma resposta completa, interessa identificar e descrever numa linguagem formal todos os acontecimentos envolvidos, identificar quais as probabilidades que são pedidas nas alíneas do enunciado, apresentar o seu cálculo e os resultado.

O Universo é o universo da produção das peças. O universo é constituído por 3 fábricas F_1, F_2 e F_3.
Sejam então os acontecimentos

F_1= «A peça é produzida pela fábrica F_1»
F_2= «A peça é produzida pela fábrica F_2»
F_3= «A peça é produzida pela fábrica F_3»

Sendo as 3 fábricas responsáveis pela totalidade da produção (do universo), e assumindo que cada fábrica produz de forma independente das outras, então a soma das probabilidades de produção das 3 fábricas tem de ser igual a 1. $P(\Omega)= P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) = 1$. ($\Omega$ representa o universo dos locais de produção das peças)

Do enunciado retira-se o seguinte: $P(F_2) = 2{,}5\times P(F_1)$ e $P(F_2) = 2{,}5\times P(F_3)$. Daqui se conclui que F_2 e F_3 produzem a mesma percentagem de peças. Então, substituindo na equação inicial e resolvendo tem-se

$P(F_1) + 2{,}5\times P(F_1) + P(F_1) = 1$, donde $4{,}5P(F_1) = 1 \Rightarrow P(F_1) = 0{,}22$

Daqui tiramos $P(F_3) = 0{,}22$ e $P(F_2) = 2{,}5\text{x}0{,}22=0{,}56$

Respondendo à pergunta, conclui-se que a probabilidade da peça tirada ao acaso ser proveniente da Fábrica 2 é aproximadamente igual a 0,56.

b) Uma peça pode ser defeituosa a partir de três origens, ou seja a probabilidade de ser defeituosa está condicionada ao local onde foi fabricada. Como à partida não é dito onde foi fabricada, temos de calcular a Probabilidade Total da peça ser defeituosa, ponderando às 3 origens possíveis.

Defina-se o acontecimento D que pode ocorrer no universo das 3 fábricas

D = «Retira-se uma peça defeituosa».

No enunciado estão presentes as seguintes probabilidades condicionadas:

Probabilidade de uma peça ser defeituosa se (condicionada a) for produzida pela Fábrica 1

$P(D|\ F_1) = 0{,}03$ (3%). Sabe-se também que $P(D|\ F_3) = 0{,}03$ e que $P(D|\ F_2) = 0{,}04$.

Pelo teorema das probabilidades totais, a probabilidade total da peça ser defeituosa, ponderada às 3 origens possíveis é:

$$P(D) = P(D/F_1) \times P(F_1) + P(D/F_2) \times P(F_2) + P(D/F_3) \times P(F_3)$$
$$= 0{,}03 \times 0{,}22 + 0{,}04 \times 0{,}56 + 0{,}03 \times 0{,}22=0{,}0356$$

Nota: a resolução desta questão podia recorrer ao conhecido diagrama de probabilidades em árvore e seria aceite essa apresentação, desde que fossem inicialmente definidos os acontecimentos.

c) Nesta alínea é dito que se retira ao acaso uma peça da produção global e verifica-se que é defeituosa.

A probabilidade pedida é a seguinte: sabendo que a peça é defeituosa, qual a probabilidade de ser proveniente da Fábrica 1? -> $P(F_1|D)$

(**D** é o acontecimento condicionante – o que sabemos *a priori* – F_1 é o acontecimento condicionado – aquele cuja probabilidade de ocorrência pretendemos, condicionados à informação que se conhece)

Trata-se de um problema que pode ser resolvido com a fórmula de Bayes

$$P(F_1|D) = \frac{P(D|F_1)P(F_1)}{P(D)} = \frac{0{,}03\times 0{,}22}{0{,}0356} \approx 0{,}185$$

III. Considere uma experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados perfeitos (não viciados) distintos e observa-se o número de pintas na face voltada para cima. Definindo a variável aleatória X como o produto dos resultados obtidos nas duas faces, determine:

a) **(1.0 v)** O espaço de resultados da experiência aleatória do lançamento dos dados.

b) **(1.0 v)** Os valores possíveis para X e a sua função de probabilidade.

c) **(1.0 v)** A função distribuição da variável aleatória X.

d) **(1.5 v)** O valor médio e a variância da v. a. X.

Resolução e critérios

Na resolução das alíneas propostas o estudante deve identificar as variáveis, descrever todos os resultados possíveis do lançamento e os valores possíveis para a variável X, tal como está definida. Devem apresentar todas as expressões que utilizam, as consultadas no formulário e outras de que necessitem.

a) A experiência está definida do seguinte modo: *lançamento de dois dados perfeitos (não viciados) distintos e observa-se o número de pintas na face voltada para cima.*

Chamemos A e B aos dois dados. Então, o espaço de resultados é constituído por todos os pares ordenados (*a, b*) possíveis, nos quais ***a*** representa o número de pintas do dados A e ***b*** representa o número de pintas do dado B. ***a*** e ***b*** podem variar de 1 até 6, o que dá 36 pares possíveis (porque os dados são distintos).

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2, 1), (2,2), (2,3), ... (6,5), (6,6)}; ou resumidamente
Ω = {(a,b): a=1,2,3, 4,5,6; b=1,2,3, 4,5,6 };

b) X – Produto dos resultados obtidos nas duas faces

A visualização dos resultados possíveis para X é simplificada se colocarmos as possibilidades num quadro de dupla entrada. No interior grelha estão todos os produtos possíveis. (são aceites em exame apresentações igualmente corretas)

Face do Dado A Face do Dado B	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

A função de probabilidade consiste em atribuir a cada valor de X a sua probabilidade de ocorrência. Assumimos que os dados são não viciados e os lançamentos **independentes**. Assim, é possível calcular a probabilidade como (número de casos favoráveis/todos os casos possíveis).
Por exemplo, a probabilidade de X tomar o valor 12 é igual a 4/36. A probabilidade de X tomar o valor 10 é igual a 2/36.
A função de probabilidade pode ser resumida da seguinte forma:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & para\ x = 1, 9,16,25,36 \\ \frac{2}{36}, & para\ x = 2, 3,5,8,10,15,18,20,24,30 \\ \frac{3}{36}, & para\ x = 4 \\ \frac{4}{36}, & para\ x = 6, 12 \end{cases}$$

c) Sendo X uma variável aleatória discreta (toma valores em pontos e não num intervalo de números reais), a função distribuição tem a expressão $F_X(x) = \sum_{x_i \le x} f_X(x_i)$. É portanto uma função cumulativa de probabilidades. Para cada x_i do domínio da variável X, atribui-se a probabilidade de X ser menor ou igual que esse x_i. Relembremos que o domínio de X são todos produtos, ou seja {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}. Apresentando os cálculos na forma mais detalhada temos o seguinte quadro da função distribuição de X:

(todos os valores de X), x_i	$X<1$	$1 \le X <2$	$2 \le X < 3$	$3 \le X < 4$	$4 \le X < 5$	$5 \le X < 6$	$6 \le X < 8$	$8\le X <9$	$9\le X <10$
$F(x)=P(X \le x_i)$	0	1/36	1/36 + P(X=2) =3/36	3/36 + P(X=3) =3/36+2/36 =5/36	5/36 + P(X=4) =5/36+3/36 =8/36	8/36 + P(X=5) =8/36+2/36 =10/36	10/36 + P(X=6) =10/36+4/36 =14/36	14/36 + P(X=8) =14/36+2/36 =16/36	16/36 + P(X=9) =16/36+1/36 =17/36

Continuação

x_i	$10\le X <12$	$12\le X <15$	$15\le X <16$	$16\le X <18$	$18\le X <20$	$20\le X <24$	$24\le X <25$	$25\le X <30$	$30\le X <36$	$X \ge 36$
$P(X \le x_i)$	17/36 + P(X=10) =17/36+2/36 =19/36	19/36 + P(X=12) =19/36+4/36 =23/36	23/36 + P(X=15) =23/36+2/36 =25/36	25/36 + P(X=16) =25/36+1/36 =26/36	26/36 + P(X=18) =26/36+2/36 =28/36	28/36 + P(X=20) =28/36+2/36 =30/36	28/36 + P(X=24) =30/36+2/36 =32/36	32/36 + P(X=25) =32/36+1/36 =33/36	33/36 + P(X=30) =33/36+2/36 =35/36	35/36 + P(X=36) =35/36+1/36 =36/36=1

Nota: a leitura do quadro faz-se do seguinte modo: a probabilidade de o produto, X, tomar valores inferiores a 14 (ou à esquerda de 14) é igual a 23/36. O intervalo assinalado a amarelo no quadro $12\le X <15$, significa que X pode tomar todos os valores nesse intervalo, exceptuando 15, por ser aberto à direita.

d) O valor médio ou Valor Esperado de uma variável aleatória discreta é dado por

$$E[X]=\mu=\sum_i x_i f_X(x_i)=\sum_i x_i P(X=x_i)$$

A variância é dada por $Var[X]=\sum_i x_i^2 f_X(x_i)-\mu^2$

Então, para a presente variável, o cálculo do valor esperado é

$$E[X]=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{2}{36}+3\times\frac{2}{36}+\ldots+36\times\frac{1}{36}=87\times\frac{1}{36}+135\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+18\times\frac{4}{36}=\frac{441}{36}=12{,}25$$

IV. Uma empresa dispõe de uma caixa multibanco para utilização dos seus funcionários, depois de muitas observações concluiu-se que o número de utilizações da caixa multibanco segue um processo de Poisson. Em média, por hora, 8 pessoas utilizam os serviços da caixa multibanco. Calcule a probabilidade de:

a) **(1.0 v)** Numa hora escolhida aleatoriamente, não ter havido mais do que uma pessoa a utilizar a máquina.

b) **(1.0 v)** Numa hora, escolhida aleatoriamente, a máquina ter sido utilizada no mínimo por 7 pessoas.

c) **(1.5 v)** Num intervalo de 10 minutos, escolhidos aleatoriamente, nenhuma pessoa ter utilizado a máquina.

Resolução e critérios

Na resolução desta questão os estudantes devem definir a variável aleatória em causa, identificar o parâmetro da distribuição de Poisson para este caso, definir os acontecimentos envolvidos em cada alínea indicar os cálculos necessários e apresentar os resultados.

a) Comece-se por descrever formalmente a variável presente no enunciado

X – Número de utilizações da caixa Multibanco (caixa ATM) por hora(60 minutos).

Sabe-se que em média há 8 pessoas por hora que levantam dinheiro na caixa multibanco da empresa, então, a variável X segue uma distribuição de Poisson com valor médio igual a 8. Sendo o parâmetro λ igual ao valor médio, tem-se

$X \frown\!\!\smile$ Poisson (λ = 8) ou, resumidamente $X \frown\!\!\smile$ *P* (λ = 8).

Pede-se nesta alínea a probabilidade de não haver mais de 1 pessoa a utilizar a máquina numa hora escolhida ao acaso. Não haver mais do que uma é equivalente a dizer que a caixa é utilizada por zero pessoas ou por uma pessoa, no máximo.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} + \frac{8^1 e^{-8}}{1!} = 0{,}003$$

b) Nesta alínea pede-se a probabilidade, numa hora escolhida ao acaso, a máquina ter sido utilizada no mínimo por 7 pessoas. No mínimo 7 significa que poderão ser 7, 8, 9, 10, 11, 12…. Por não haver limite máximo, é mais fácil calcular a probabilidade usando o inverso.

$$P(X \geq 7) = 1 - [P(X \leq 6)] = 1 - \left[e^{-8} \times \left(\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!} + \frac{8^4}{4!} + \frac{8^5}{5!} + \frac{8^6}{6!} \right) \right]$$

Nota. Por definição o fatorial de zero, 0!, é 1. O fatorial de qualquer número inteiro n é representado por n! e é determinado por n!= n×(n-1) ×(n-2) ×…×1. Por exemplo, o fatorial de 5 calcula-se por - 5!= 5×4 ×3 ×2×1=120. (uma calculadora científica tem uma função que indica o fatorial de qualquer número inteiro, e geralmente está numa tecla assinalada por *x!*)

c) Nesta alínea pede-se a probabilidade de nenhuma pessoa utilizar a máquina multibanco num período de 10 minutos escolhidos ao acaso. No enunciado é dado o valor médio de utilizadores para uma hora, interessa fazer a proporção para 10 minutos. Se em 60 minutos a máquina é utilizada, em média, por 8 pessoas, em 10 minutos, a máquina será utilizada em média por x pessoas. $\frac{x}{8} = \frac{10}{60} \Rightarrow x \approx 1{,}33$

Temos agora a variável Y – Número de utilizações da caixa Multibanco em cada 10 min.

A distribuição passa a ser Y $\frown\!\!\smile$ *P* (λ = 1,33). A probabilidade pedida é $P(Y = 0) = \frac{1{,}33^0 e^{-1{,}33}}{0!} = 0{,}264$

V. Os resultados numa prova de corrida de determinada modalidade são normalmente distribuídos com uma média de 35 segundos e um desvio padrão de 6 segundos. Qual a probabilidade de numa prova seleccionada aleatoriamente obter resultados:

a) **(1.0 v)** Superiores a 32s? (faça o esboço gráfico marcando a área correspondente)

b) **(1.0 v)** Inferiores a 36s? (faça o esboço gráfico)

c) **(1.5 v)** Entre os 30s e os 37s? (faça o esboço gráfico)

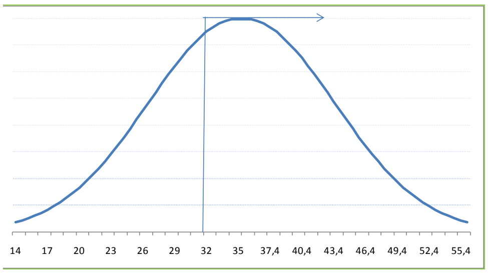
d) **(1.0 v)** De no final da primeira volta, correspondente a quinze provas de corrida, a média dos resultados ser inferior a 34 s?

Resolução e critérios

Esta questão envolve principalmente o conhecimento da lei de distribuição Normal, os seus parâmetros μ e σ e o cálculo das probabilidades deste tipo de variável com recurso à standardização (variável reduzida) e à consulta da tabela. É aceite uma resolução equivalente à que se segue.

a) Sendo X – Tempo de duração da corrida realizado pelo atleta, em segundos.
X $\frown\!\!\smile$ *N* (μ=35; σ=6).

Pede-se a probabilidade P(X>32), probabilidade correspondente à área da curva que fica à direita de 32. Sabe-se que não é fácil determinar analiticamente esta probabilidade mas o cálculo é facilitado usando a variável Normal reduzida é dada por $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ e que tem a função distribuição tabelada. Sabemos também que a tabela fornece probabilidades acumuladas à esquerda de um Z, por isso é conveniente utilizar a probabilidade complementar (probabilidade à direita de z = 1-probabilidade à esquerda de z).

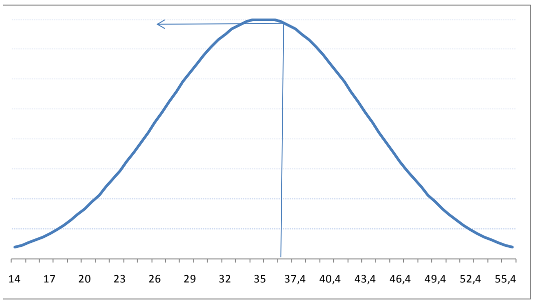


$$P(X > 32) = 1 - P(X \le 32) \underbrace{=}_{\substack{standardizando \\ em\ ambos\ os\ lados}} 1 - P\left(\frac{X-35}{6} < \frac{32-35}{6}\right) =$$

$$= 1 - P(Z < -0{,}5) = 1 - \underbrace{\Phi}_{\substack{valor\ tabelado \\ para\ z=-0{,}5}} (-0{,}5) = 1 - 0{,}309 = 0{,}691$$

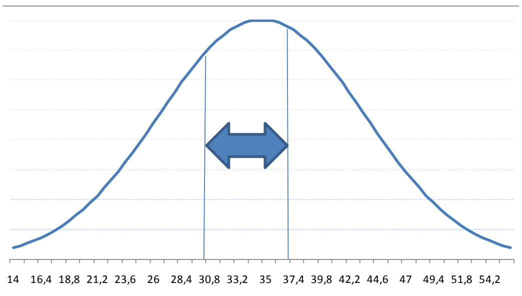
z	0	1
-0,6	0,274	0,271
-0,5	0,309	0,305
-0,4	0,345	0,341

b) Nesta alínea pede-se a probabilidade P(X < 36). Utilizando um raciocínio análogo ao da alínea anterior determina-se esta probabilidade.



$$P(X < 36) = P(Z < 0{,}167) \approx \Phi(0{,}17) = 0{,}567$$

c) Nesta alínea pede-se a probabilidade de um intervalo, P(30<X<37). Sabemos da teoria das probabilidades que P(a<X<b)=F(b)-F(a). No caso da distribuição normal reduzida a notação é P(a<X<b)=Φ(b)-Φ(a). Utilizando novamente o raciocínio das alíneas anteriores, tem-se:



$$P(30 < X < 37) = P\left(\frac{30-35}{6} < Z < \frac{37-35}{6}\right) =$$
$$= P(-0{,}83 < Z < 0{,}33) = \Phi(0{,}33) - \Phi(-0{,}83) =$$
$$= 0{,}629 - 0{,}203 = 0{,}426$$

z	0	1	2	3
-2,0	0,023	0,022	0,022	0,021
....	....	....	....	....
-0,8	0,212	0,209	0,206	0,203
....	....	....	....	....
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629

d) Nesta alínea pede-se a probabilidade para uma média de um conjunto de 15 provas. ***Não é*** pedida uma probabilidade para X, o tempo de ***uma prova*** de corrida.

A média de 15 provas também é uma variável aleatória (porque para cada amostra de provas temos uma média de tempos, logo ma média é variável). Defina-se então

$\overline{X}$ = "Tempo médio de corrida relativo, a 15 provas realizadas"

Sendo a média de tempos de prova que seguem cada um uma distribuição normal; sendo as provas de corrida independentes; a média $\overline{X}$ das 15 provas também tem distribuição normal, e sabe-se que os parâmetros são os seguintes: $X \to N\left(\mu;\sigma^2\right) \Rightarrow \overline{X} \to N\left(\mu;\frac{\sigma^2}{n}\right)$

Então, para n=15, $\mu_{\overline{X}} = 35\ segundos$ e a variância é $\sigma^2_{\overline{X}} = 6^2/15 = 36/15 = 2{,}4$, o que quer dizer que o desvio padrão é $\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{2{,}4} = 1{,}549$

$$P(\overline{X} < 34) = P\left(Z < \frac{34-35}{1{,}549}\right) = P(Z < -0.646) \approx \Phi(-0{,}65) = 0{,}258$$

ANEXO A

Modelos	Expressão das funções de Probabilidade	μ	σ^2
Bernoulli	$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$ $x=0,1$	p	$p(1-p)$
Binomial	$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ $x=0,1,..n$	np	$np(1-p)$
Poisson	$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $x=0,1,...$	λ	λ
Uniforme	$P(X=x)=\frac{1}{n}$ $x=0,1,...$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Geométrica	$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$; $x=1,...$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeométrica	$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}.\frac{N-M}{N}.\frac{N-n}{N-1}$

	Expressão das funções de:		μ	σ^2
Modelos	**Densidade**	**Distribuição**		
Exponencial	$f(x)=\lambda\, exp(-\lambda x) \quad x>0$	$F(x)=1-exp(-\lambda x) \quad x>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad x\in[a,b]$	$F(x)=\frac{x-a}{b-a} \quad x\in[a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$		μ	σ^2

Anexo A - Valores da Função Distribuição Normal Reduzida

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = P(Z \leq z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-2,0	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018
-1,9	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,026	0,025	0,024	0,024	0,023
-1,8	0,036	0,035	0,034	0,034	0,033	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029
-1,7	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037
-1,6	0,055	0,054	0,053	0,052	0,051	0,049	0,048	0,047	0,046	0,046
-1,5	0,067	0,066	0,064	0,063	0,062	0,061	0,059	0,058	0,057	0,056
-1,4	0,081	0,079	0,078	0,076	0,075	0,074	0,072	0,071	0,069	0,068
-1,3	0,097	0,095	0,093	0,092	0,090	0,089	0,087	0,085	0,084	0,082
-1,2	0,115	0,113	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,100	0,099
-1,1	0,136	0,134	0,131	0,129	0,127	0,125	0,123	0,121	0,119	0,117
-1,0	0,159	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138
-0,9	0,184	0,181	0,179	0,176	0,174	0,171	0,169	0,166	0,164	0,161
-0,8	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,198	0,195	0,192	0,189	0,187
-0,7	0,242	0,239	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,215
-0,6	0,274	0,271	0,268	0,264	0,261	0,258	0,255	0,251	0,248	0,245
-0,5	0,309	0,305	0,302	0,298	0,295	0,291	0,288	0,284	0,281	0,278
-0,4	0,345	0,341	0,337	0,334	0,330	0,326	0,323	0,319	0,316	0,312
-0,3	0,382	0,378	0,374	0,371	0,367	0,363	0,359	0,356	0,352	0,348
-0,2	0,421	0,417	0,413	0,409	0,405	0,401	0,397	0,394	0,390	0,386
-0,1	0,460	0,456	0,452	0,448	0,444	0,440	0,436	0,433	0,429	0,425
-0,0	0,500	0,496	0,492	0,488	0,484	0,480	0,476	0,472	0,468	0,464
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982

FIM