U.C. 21002

Álgebra Linear I

31 de janeiro de 2017

- O exame é composto por **6** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) **deverão ser respondidas no enunciado**.
- As questões dos grupos **II**, **III**, **IV**, **V**, e **VI** deverão ser respondidas no Caderno de Prova.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	**III**	**IV**	**V**	**VI**
3.0 val.	3.0 val.	4.0 val.	2.0 val.	4.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon xy = 1\}, \qquad B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon xyzw = 0\},$$
$$C = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon -x - y + w = 0\}, \qquad D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon z = 0\}.$$

Então:

- ☐ a) Os conjuntos A, B, C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ b) Só os conjuntos B, C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ c) Só os conjuntos C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ d) O conjunto D não é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Questão 2

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz que satisfaz $A^2 - I_n = 0$, onde I_n designa a matriz identidade de ordem n. Então:

- ☐ a) $A = I_n$.
- ☐ b) $\det A = 0$.
- ☐ c) $A^{-1} = A$.
- ☐ d) $A^{-1} = I_n$.

Questão 3

Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$F = \langle (1, 0, 1), (1, 2, 1) \rangle \text{ e } G = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 3) \rangle.$$

Então:

- ☐ a) $\dim(F + G) = 3$.
- ☐ b) $\dim(F \cap G) = 0$.
- ☐ c) $\dim(F + G) = 4$.
- ☐ d) $\dim F = 1$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 4

Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz com um valor próprio λ e vetor próprio associado u. Então:

- ☐ a) $\det A = \lambda$.
- ☐ b) u não é vetor próprio de A^3.
- ☐ c) u é vetor próprio de $3A$.
- ☐ d) u não é vetor próprio de $A + 3I_3$.

Questões de desenvolvimento

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A + I_3$. Então A é invertível e $A^{-1} = A - I_3$.

b) Se 1 é valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então $\det(A - I_n) = 0$.

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

IV. Para α real considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2-\alpha & 2+\alpha \\ -1 & -3 & -2+\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Para cada α real determine a característica e a nulidade[1] da matriz A_α.

b) Determine bases para $\mathcal{N}(A_\alpha)$ e para $\mathcal{C}(A_\alpha)$ (*o núcleo e o espaço das colunas de* A_α).

c) Calcule o determimante de A_α e determine os valores de α para os quais a matriz A_α é invertível.

d) Calcule a matriz inversa de A_α sempre que possível.

V. Considere a transformação $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b+c+d, a-b+c-d).$$

a) Mostre que a transformação T é uma transformação linear.

b) Determine a matriz que representa a transformação T em relação a bases à sua escolha.

VI. Considere a transformação linear $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $S(x,y,z) = (x, x-y+z, y-z)$.

a) Determine a matriz A que representa S em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcule os valores próprios de A.

c) Determine os subespaços próprios de A.

d) Determine se é possível escrever A na forma $A = PDP^{-1}$, onde $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine matrizes P e D nessas condições.

FIM

[1] A nulidade de A_α é a dimensão do seu núcleo $\mathcal{N}(A_\alpha)$.