p-Fólio - Resolução

U.C. 21157
Cálculo para Informática

24 de janeiro de 2018

1. (a) Temos

$$\int \left(e^{3x} + \sin(2x) + x^3\right) dx = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{x^4}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

   (b) Fazendo integração por partes temos

$$\int \cos^2(x)dx = \int \cos(x)\cos(x)dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx =$$

$$\sin(x)\cos(x) + \int \left(1 - \cos^2(x)\right) dx = \sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \cos^2(x)dx =$$

$$\sin(x)\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx.$$

   Logo

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx,$$

   pelo que

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{\sin(x)\cos(x) + x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. A área é dada por

$$\int_0^1 \sin(\pi x) + xdx.$$

   Uma primitiva de $\sin(\pi x) + x$ é, por exemplo, $-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{x^2}{2}$, pelo que, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^1 \sin(\pi x) + xdx = \left(-\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{\cos(0)}{\pi} - \frac{0}{2}\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

3. É uma consequência directa do teorema do valor médio para integrais. A função $\sin(x^2)$ é contínua no intervalo $[0,1]$, porque é a composição de funções contínuas nesse intervalo. Então, existe $c \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sin(x^2)dx = \int_0^1 \sin(x^2)dx = \sin(c^2).$$

FIM