Exame | Instruções para a realização de exame

Álgebra Linear II | 21003

Período de Realização
Consulatar os prazos de entrega indicados pelos serviços.

Objetivos
O exame cobre potentcialmente a totalidade da matéria lecionada. A prova é composta por 5 questões, contém 2 paginas e termina com a palavra FIM.

Recursos
A prova é individual, com consulta dos recursos da unidade curricular disponíveis na plataforma.

Critérios de avaliação e cotação
Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total do exame é de 20 valores distribuídos de acordo com a tabela.

questão	$1a$	$1b$	$1c$	2	$3a$	$3b$	4	5
cotação	1	1	1	4	1	1	6	5

2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas:
   - justificações de todos os passos da resolução;
   - capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente;

- capacidade de estruturar logicamente as respostas;
- capacidade de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

   Todas as justificações terão de ser escritas por palavras do próprio.

   A bibliografia consultada terá de ser mencionada.

   Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

4. Não serão aceites respostas obtidas por meio de software, de qualquer tipo.

Normas a respeitar

A prova de exame global terá a duração de 120 minutos, à qual acresce um período de tolerância de 60 minutos.

A tolerância destina-se à revisão e formatação da resolução em pdf, tendo como objetivo principal assegurar a respetiva submissão atempada.

Deve redigir o seu exame Global na Folha de Resolução disponibilizada e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu exame não deve ultrapassar **16** páginas A4.

Utilize letra legível, se a prova for manuscrita. Atente à qualidade e legibilidade da digitalização.

A prova deve ser entregue como um único ficheiro pdf. Não são aceitos outros formatos.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do exame global, segundo o exemplo apresentado: 000000ExameGlobal.pdf.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo Exame global até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas técnicos.

No ato da entrega, assegure a integridade do ficheiro. Ficheiros que não abrem não podem ser corrigidos.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Wolfram Bentz

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{C}),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

a) Determine todos os valores próprios de A. Determine as suas multiplicidades algébricas e geométricas.

b) Indique, justificando, qual a forma canónica de Jordan, J, semelhante à matriz A.

c) Determine a matriz invertível Q tal que $J = Q^{-1}AQ$.

2. Seja C^1 o espaço vetorial das funções reais definidas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$, com primeira derivada contínua, e seja $\cdot|\cdot : C^1 \times C^1 \to \mathbb{R}$ a aplicação $f|g = f'(0)g(0) + f(1)g'(1)$, sendo h' a derivada de h.

   Quais dos axiomas A1, A2, A3, e A4 (Def. 2.1) são validos para a aplicação $\cdot|\cdot$?

3. Considere o espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$A|B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

onde $A = (a_{ij})$ e$B = (b_{ij})$ (vocês podem assumir sem justificação que este é um produto interno.) Seja

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : x - y + z = 0 \right\}.$$

W é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (vocês podem assumir isto sem justificação.)

(a) Determine uma base ortogonal de W.

(b) Calcule $\text{proj}_W \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Considere a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz.$$

(vocês podem assumir sem justificação que este é uma forma quadrática).

Diagonalize a forma quadrática Q, exibindo explicitamente uma base de $\mathcal{R}^3$ na qual a matriz de Q é diagonal.

5. Em $\mathcal{R}^3$ munido do referencial canónico considere as seguintes entidades geométricas:

$$\alpha = \{(x, y, z) : x + y - 2z = 4\},$$

$$\beta = \langle (2, 4, -6)^T, (-1, -2, 3)^T \rangle.$$

Sejam $\gamma = \alpha \vee \beta$ e $\delta = \alpha \cap (\beta^\perp)$. Esclareça, justificando detalhadamente, a natureza de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (isto é, quais são rectas, quais são planos, etc).

FIM