Matemática Preparatória | 21160

Proposta sumária de resolução

1. Calcule os seguintes limites.

   (a) **[0.5 val.]** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} \underset{\text{caso notável}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

   (b) **[0.5 val.]** $\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{2n-1}$

$$\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{2n-1} \overset{(1^\infty)}{=} \lim_{n\to +\infty} \left[\left(\frac{n+2+3}{n+2}\right)^{n}\right]^2 \times \lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{n\to +\infty} \left[\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{n+2}\right]^2 \times \lim_{n\to +\infty} \left[\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{-2}\right]^2 \times 1$$

$$\left[\lim_{n\to +\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k\right] \quad = \left(e^3\right)^2 \times 1 = e^6$$

2. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} a + e^{x+b} & x \leqslant 2 \\ \ln(x^2-3) & x > 2 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) **[0.4 val.]** Determine a e b de modo que f seja diferenciável para $x = 2$.

Para que f seja diferenciável em $x = 2$, é necessário que seja contínua nesse ponto, isto é, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$,

$$\lim_{x\to 2^-} a + e^{x+b} = a + e^{2+b}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \ln(x^2-3) = \ln(2^2-3) = 0$$

Logo, para garantir a continuidade, $\boxed{a + e^{2+b} = 0}$.

Quanto à diferenciabilidade em $x = 2$.

Usando o limite notável, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{a + e^{2+h+b} - a - e^{2+b}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{2+b}(e^h-1)}{h}$$

$$= e^{2+b} \lim_{h\to 0^-} \frac{e^h-1}{h} = e^{2+b}.$$

Se $\varphi(x) \to 0$ quando $x \to 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln[\varphi(x)+1]}{\varphi(x)} = 1$,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln\left[(2+h)^2-3)\right] - \ln(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(h^2+4h+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(h(h+4)+1)}{h(h+4)}(h+4) = 4.$$

Logo, para garantir a diferenciabilidade, as derivadas laterais têm de ser iguais, $\boxed{b = \ln(4) - 2}$.

Substituindo o valor de b na primeira equação,

$$a + e^{2+\ln(4)-2} = 0 \Leftrightarrow a + e^{\ln(4)} = 0 \Leftrightarrow a = -4.$$

(b) **[0.4 val.]** Indique o contradomínio da função para os valores de a e b encontrados. Caso não tenha resolvido a alínea anterior, atribua valores que lhe pareçam razoáveis.

Usando os valores $b = \ln(4) - 2$ e $a = -4$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+\ln(4)-2} - 4 & x \leqslant 2 \\ \ln(x^2-3) & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 4e^{x-2} - 4 & x \leqslant 2 \\ \ln(x^2-3) & x > 2 \end{cases}.$$

No primeiro ramo,

$$x \leqslant 2 \Rightarrow x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow 0 < e^{x-2} \leqslant 1 \Rightarrow 0 < 4e^{x-2} \leqslant 4$$

$$\Rightarrow -4 < 4e^{x-2} - 4 \leqslant 0.$$

No segundo ramo,

$$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x^2 - 3 > 1 \Rightarrow \ln(x^2 - 3) > \ln(1) = 0.$$

Logo, o contradomínio da função é $]-4, 0] \cup]0, +\infty[=]-4, +\infty[$.

3. **[0.5 val.]** Usando as regras de derivação, simplifique ao máximo a derivada da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(1-2x)^2}.$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x}}{(1-2x)^2}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'(1-2x)^2 - \sqrt{x}\,[(1-2x)^2]'}{((1-2x)^2)^2} \\
\left[\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}\right] \quad &= \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-2x)^2 - \sqrt{x}(2 \times (-2) \times (1-2x))}{(1-2x)^4} \\
&= \frac{(1-2x)\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\right)}{(1-2x)^4} = \frac{\frac{1-2x}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1-2x)^3} \\
&= \frac{1-2x+8x}{2\sqrt{x}(1-2x)^3} = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}(1-2x)^3}
\end{aligned}$$

4. Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \sqrt{x^2+5}$.

   (a) **[0.5 val.]** Usando a definição de derivada num ponto, calcule $f'(2)$.

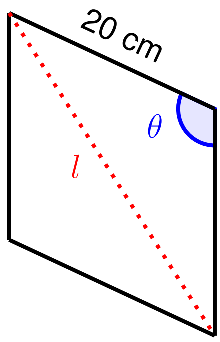
$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(2+h)^2+5} - \sqrt{2^2+5}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(2+h)^2+5} - 3}{h} \times \frac{\sqrt{(2+h)^2+5}+3}{\sqrt{(2+h)^2+5}+3} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h^2+4h+4+5-9}{h(\sqrt{(2+h)^2+5}+3)} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h(\sqrt{(2+h)^2+5}+3)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h+4}{\sqrt{(2+h)^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(b) **[0.4 val.]** Sendo g uma função real de variável real tal que $g(-1) = 2$ e $g'(-1) = 3$, calcule $(fog)'(-1)$.

Usando a regra da cadeia,

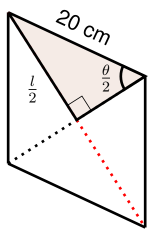
$$(fog)'(-1) = f'(g(-1))g'(-1) = f'(2) \times 3 \underset{(a)}{=} \frac{2}{3} \times 3 = 2.$$

5. Um conjunto de escadas retráteis é utilizado para aceder a um sótão. A estrutura utiliza um mecanismo de pantógrafo, que é um conjunto de losangos com ângulos variáveis para controlar a retração. À direita na imagem, é possível ver uma ilustração de um desses losangos.



(a) **[0.4 val.]** Escreva o comprimento l em função do ângulo θ.

Traçando uma bissetriz no ângulo θ, é possível obter um triângulo retângulo (a castanho). Usando trignometria, num triângulo retângulo, o seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa



$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{l}{2}}{20} \Leftrightarrow l = 40\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ cm.}$$

(b) **[0.4 val.]** Determine a taxa de variação de l no momento em que $\theta = 120°$, indicando a unidade adequada.

Comecemos por derivar a função encontrada na alínea anterior, $f(\theta) = 40\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $f'(\theta) = 20\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 20\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ cm por radiano.}$$

FIM