

”

E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio



UNIDADE CURRICULAR: Elementos de Probabilidades e Estatística

CÓDIGO: 21037

DOCENTE: Catarina Nunes

TUTORAS: Ana Leitão Ferreira e Helena Grilo

A preencher pelo estudante

NOME: António Manuel Leal Mendes

N.º DE ESTUDANTE: 2400186

CURSO: Licenciatura em Engenharia Informática

DATA DE ENTREGA: 18-05-2025

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

1

- 1.1 Como se trata do lançamento de dois dados, o espaço amostral Ω , tem $6 \times 6 = 36$ possibilidades, ou seja $P(D1, D2) = P(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(D1=dado1, D2=dado2)

Para $X = \max(D1, D2)$

Valor de X	Combinações Possíveis	Número de casos	$P_X(x)$
1	(1,1)	1	$\frac{1}{36}$
2	(2,1),(1,2),(2,2)	3	$\frac{3}{36}$
3	(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)	5	$\frac{5}{36}$
4	(1,4),(2,4),(3,4),(4,4) (4,3),(4,2),(4,1)	7	$\frac{7}{36}$
5	(1,5),(2,5),(3,5),(4,5), (5,5),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1)	9	$\frac{9}{36}$
6	(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6), (6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)	11	$\frac{11}{36}$

Concluimos, portanto, que a função de probabilidade de X:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{se } x=1 \\ \frac{3}{36} & \text{se } x=2 \\ \frac{5}{36} & \text{se } x=3 \\ \frac{7}{36} & \text{se } x=4 \\ \frac{9}{36} & \text{se } x=5 \\ \frac{11}{36} & \text{se } x=6 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

Para $Y=D1+D2$

Valor de Y	Combinações Possíveis	Número de casos	$P_Y(y)$
2	(1,1)	1	$\frac{1}{36}$
3	(1,2),(2,1)	2	$\frac{2}{36}$
4	(1,3),(2,2),(3,1)	3	$\frac{3}{36}$
5	(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)	4	$\frac{4}{36}$
6	(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)	5	$\frac{5}{36}$
7	(1,6),(2,5),(3,4),(4,3) (5,2),(6,1)	6	$\frac{6}{36}$
8	(2,6),(3,5),(4,4) (5,3),(6,2)	5	$\frac{5}{36}$
9	(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)	4	$\frac{4}{36}$

10	(4,6),(5,5),(6,4)	3	$\frac{3}{36}$
11	(6,5),(5,6)	2	$\frac{2}{36}$
12	(6,6)	1	$\frac{1}{36}$

Concluimos, portanto, que a função de probabilidade de Y:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{se } y=2 \\ \frac{2}{36} & \text{se } y=3 \\ \frac{3}{36} & \text{se } y=4 \\ \frac{4}{36} & \text{se } y=5 \\ \frac{5}{36} & \text{se } y=6 \\ \frac{6}{36} & \text{se } y=7 \\ \frac{5}{36} & \text{se } y=8 \\ \frac{4}{36} & \text{se } y=9 \\ \frac{3}{36} & \text{se } y=10 \\ \frac{2}{36} & \text{se } y=11 \\ \frac{1}{36} & \text{se } y=12 \\ 0 & \text{se } y=0 \end{cases}$$

1.2 $E(X) = \sum_{x=1}^6 x \cdot P_X(x) \Rightarrow$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} \Rightarrow$$

$$E(X) = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} \Rightarrow$$

$$E(X) = \frac{161}{36}$$

O valor esperado de X é de $\frac{161}{36}$.

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{12} y \cdot P_Y(y) \Rightarrow$$

$$E(Y) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} \Rightarrow$$

$$E(Y) = \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} \Rightarrow$$

$$E(Y) = \frac{252}{36} \Rightarrow$$

$$E(Y) = 7$$

O valor esperado de Y é de 7.

1.3 $\sigma(x) = \sqrt{\text{Var}(x)}$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^6 x^2 \cdot P_X(x) \Rightarrow$$

$$E(x^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} \Rightarrow$$

$$E(x^2) = \frac{1+12+45+112+225+396}{36} \Rightarrow$$

$$E(x^2) = \frac{791}{36}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\text{Var}(x) = \frac{791}{36} - \frac{25921}{1296} \Rightarrow$$

$$\text{Var}(x) = \frac{28476-25921}{1296} \Rightarrow$$

$$\text{Var}(x) = \frac{2555}{1296}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{2555}{1296}} \Rightarrow \sigma(x) \approx 1,404, \text{ ou seja o desvio padra de } X \approx 1,404.$$

$$\sigma(y) = \sqrt{\text{Var}(y)}$$

$$\text{Var}(y) = E(y^2) - (E(y))^2$$

$$E(y^2) = \sum_{y=2}^{12} y^2 \cdot P_Y(y) \Rightarrow$$

$$E(y^2) = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + 5^2 \cdot \frac{4}{36} + 6^2 \cdot \frac{5}{36} + 7^2 \cdot \frac{6}{36} + 8^2 \cdot \frac{5}{36} + 9^2 \cdot \frac{4}{36} + 10^2 \cdot \frac{3}{36} + 11^2 \cdot \frac{2}{36} + 12^2 \cdot \frac{1}{36} \Rightarrow$$

$$E(y^2) = \frac{4+18+48+100+180+294+320+324+300+242+144}{36} \Rightarrow$$

$$E(y^2) = \frac{1974}{36}$$

$$\text{Var}(y) = \frac{1974}{36} - 7^2 \Rightarrow$$

$$\text{Var}(y) = \frac{210}{36}$$

$$\sigma(y) = \sqrt{\frac{210}{36}} \Rightarrow \sigma(y) \approx 2,414, \text{ ou seja, o desvio padrão de } Y \approx 2,414.$$

2

2.1 A

2.2 A

2.3 A

3

3.1

Para $Y=x^2$, temos que :

$$Y=-2^2 = 4; Y=-1^2 = 1; Y=1^2 = 1; Y=2^2 = 4$$

X	-2	-1	1	2
Y	4	1	1	4

$$\text{Para } P(y=1) = P(x=(-1)) + P(x=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Para } P(y=4) = P(x=(-2)) + P(x=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Y	1	4
F(y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } y=1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } y=4 \\ 0 & \text{se } y=0 \end{cases}$$

3.2

X	Y	P(X,Y)
-2	4	$\frac{1}{4}$
-1	1	$\frac{1}{4}$
1	1	$\frac{1}{4}$
2	4	$\frac{1}{4}$

$$F(x,y) = \left\{ \frac{1}{4}, \text{ pois } (x,y) = (-2,4), (-1,1), (1,1), (2,4) \right\}$$

3.3

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) \Rightarrow E(X) = (-2) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow E(X) = \frac{-2-1+1+2}{4} \Rightarrow E(X) = \frac{0}{4} \Rightarrow E(X) = 0$$

$$E(Y) = \sum y \cdot f(y) \Rightarrow E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow E(Y) = \frac{1+4}{2} \Rightarrow E(Y) = \frac{5}{2} \Rightarrow E(Y) = 2,5$$

$$E(XY) = \sum x \cdot y \cdot f(x,y) \Rightarrow E(XY) = (-2) \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow E(XY) = \frac{-8-1+1+8}{4} \Rightarrow E(XY) = \frac{0}{4} \Rightarrow E(XY) = 0$$

$$\text{CoVar}(XY) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot 2,5 = 0$$

$$E(x^2) = (-2^2) \cdot \frac{1}{4} + (-1^2) \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$E(x^2) = \frac{4+1+1+4}{4} \Rightarrow E(x^2) = \frac{10}{4} \Rightarrow E(x^2) = 2,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{E(x^2) - (E(x))^2} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2,5 - 0} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2,5}$$

$$E(y^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$E(y^2) = \frac{1+16}{2} \Rightarrow E(y^2) = \frac{17}{2} \Rightarrow E(y^2) = 8,5$$

$$\sigma_y = \sqrt{E(y^2) - (E(y))^2} \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{8,5 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{8,5 - 6,25} \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{2,25}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(XY)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \Rightarrow \rho_{XY} = \frac{0}{\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{2,25}} \Rightarrow \rho_{XY} = 0$$

3.4 Para que sejam independentes, $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$, para todos os pares, vamos demonstrar como contra exemplo o seguinte:

Seja $X=(-2)$ e $Y=4$

$P(X=(-2), Y=4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, mas pela tabela demonstrada anteriormente sabemos que é

falso pois na tabela conjunta demonstrada na questão 3.1, em $X=(-2)$ e $Y=(4)$,

$P=\frac{1}{4}$, e como $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$, demonstramos que X e Y não são independentes.

4

4.1

Consideremos que no concurso “patos com estilo”, a probabilidade dos patos apenas com chapéu de P_c , patos com apenas flores de P_f e patos sem qualquer adorno de P_n .

Sabemos que foram escolhidos 10 patos, logo consideremos $m=10$, temos então:

$$P_c = 0,40$$

$$P_f = 0,35$$

$$P_n = 0,25$$

$$m = 10$$

Para que em 10 patos, 2 tenham chapéu, 2 tenham flores e os restantes (6) não tenham adereços, teremos então:

$$P(P_c=2, P_f=2, P_n=6) = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 6!} \cdot (0,40)^2 \cdot (0,35)^2 \cdot (0,25)^6 \Rightarrow$$

$$P(P_c=2, P_f=2, P_n=6) = \frac{3628800}{2880} \cdot 0,16 \cdot 0,1225 \cdot 0,000244140625 \Rightarrow$$

$$P(P_c=2, P_f=2, P_n=6) = 1260 \cdot 0,16 \cdot 0,1225 \cdot 0,000244140625 \Rightarrow$$

$$P(P_c=2, P_f=2, P_n=6) \approx 0,006$$

Logo a probabilidade de 2 dos patos terem chapéu, 2 dos patos terem flores e os restantes não terem adereços é de aproximadamente 0,006 .

4.2 A

4.3 B