21002 - Álgebra Linear I

Ano lectivo 2015/16

Docente: António Araújo

e-fólio B (8 a 18 de janeiro)

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 5 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato pdf), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da sua turma, em "e-Fólio B" até ao dia limite referido no topo desta página.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Assegure-se de que o seu trabalho está legível.
- Recorde que o e-fólio é um trabalho individual.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores. Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a V têm cotações de 0.6, 0.85, 0.7, 0.85 respectivamente.

Por favor preencha os seus dados:

- Nome:
- B.I:
- N^o de Estudante'
- Curso:

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

I. Questões de escolha múltipla.

1. Considere as seguintes aplicações:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (x, |y|, z) \\
g(x, y, z) &= (xy, yz, zx) \\
h(x, y, z) &= 2^{x+y+z}
\end{aligned}
$$

☐ a) Apenas f e g são lineares.
☐ b) Apenas f e h são lineares.
☐ c) Apenas uma das aplicações é linear.
☒ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

2. Considere em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B} = ((2,1),(1,1))$ e a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

quando se toma no espaço de partida e no espaço de chegada as bases canónicas respectivas.

Então, quando se toma no espaço de partida a base canónica e no espaço de chegada a base $\mathcal{B}$, a aplicação T é representada pela matriz

☐ a)

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

☒ b)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

☐ c)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

☐ d) Nenhuma das anteriores.

3. Considere as seguintes aplicações com domínio em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(A) &= \det A \\ g(A) &= tr(A) \\ h(A) &= A^T \end{aligned}$$

☐ a) f, g, e h são aplicações lineares.
☐ b) Apenas f e g são lineares.
☐ c) g e h são endomorfismos.
☒ d) dim Nuc g $= n^2 - 1$.

4. Considere a aplicação linear definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & a \\ c & b \end{bmatrix}.$$

Então
☒ a) 1 é valor próprio de f com multiplicidade geométrica 2.
☐ b) 1 é valor próprio de f com multiplicidade geométrica 1.
☐ c) 1 não é valor próprio de f.
☐ d) 2 é valor próprio de f.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II.

Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) e c) seguintes, justificando a resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio característico é $p(z) = z^3 - 3z^2 + 2z$. Então:

a) dim Nuc(A)= 0.

b) A é uma matriz invertível.

c) A é diagonalizável.

Solução:

a) Falso. Como $p_A(z) = z^3 - 3z^2 + 2z = z(z-1)(z-2)$, A tem três valores próprios distintos. Designando por E_λ o espaço próprio correspondente ao valor próprio λ, temos $\dim E_0 = 1$.

b) Falso. O polinómio característico de A é $p_A(z) = z^3 - 3z^2 + 2z = z(z-1)(z-2)$ então, necessariamente 0 é valor próprio de A e portanto A não é uma matriz invertível.

c) Verdadeiro, porque temos três valores próprios distintos e $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$
.

III. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} f(0,1,1) = (-1,0,1) \\ f(1,0,1) = (1,-1,0) \\ f(1,1,0) = (0,1,-1) \end{cases}$$

a) Determine a expressão geral de f.
b) Determine a matriz $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ que representa f em relação à base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ na partida e na chegada.
c) Defina os subespaços Nuc f e Im f. Determine uma base para Nuc f e determine uma base para Im f.
d) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de Im f.

Solução:

a)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\ =& x\left(\frac{-f(0,1,1)+f(1,0,1)+f(1,1,0)}{2}\right) \\ &+ y\left(\frac{f(0,1,1)-f(1,0,1)+f(1,1,0)}{2}\right) \\ &+ z\left(\frac{f(0,1,1)+f(1,0,1)-f(1,1,0)}{2}\right) \\ =& x\left(\frac{-(-1,0,1)+(1,-1,0)+(0,1,-1)}{2}\right) \\ &+ y\left(\frac{(1,0,1)-(1,-1,0)+(0,1,-1)}{2}\right) \\ &+ z\left(\frac{(1,0,1)+(1,-1,0)-(0,1,-1)}{2}\right) \\ =& (x-y, y-z, z-x) \end{aligned}$$

b) A partir da expressão geral temos que $f(1,0,0) = (1,0,-1)$, $f(0,1,0) = (-1,1,0)$, $f(0,0,1) = (0,-1,1)$. Então a matriz da aplicação é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) (x, y, z) pertence ao núcleo de f sse $x = y = z$. Então $\mathrm{Nuc}(f) = \langle(1,1,1)\rangle$

Por operações elementares nas colunas de A obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então $\mathrm{Im}(f) = \langle(1,0,-1), (-1,1,0)\rangle$

d) Podemos completar a base da imagem de f com o vector $(1,0,0)$. Notamos que a matriz resultante é triangular pelo que temos uma base.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IV. Considere as bases de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Obtenha a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$.

Solução:

Denotando $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ temos que $id(e_1') = e_2 + e_3 + e_4$. Os outros casos seguem o mesmo padrão, isto é, e_i' é a soma dos $e_j, j \neq i$. Então a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz pretendida é a inversa desta, ou seja:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

V. Considere o endomorfismo linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por

$$T(A) = A^T,$$

que transforma uma matriz na sua transposta.

a) Determine a matriz $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ onde

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

b) Calcule os valores próprios de T e os respectivos espaços próprios.

c) Determine uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em que $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ seja diagonal, e calcule $\mathcal{M}(T; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

Solução:

a) Verificamos que $A(e_1) = e_1, A(e_2) = e_3, A(e_3) = e_2, A(e_4) = e_4$. A matriz da aplicação é portanto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Fazendo

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{cases} a &= \lambda a \\ c &= \lambda b \\ b &= \lambda c \\ d &= \lambda d \end{cases}$$

De onde tiramos que $\lambda = 1$ ou $a = 0$.

Quando $\lambda = 1$ temos $c = b$ pelo que obtemos como vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$ as matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

Estas matrizes são geradas pela base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se $a = 0$ então $c = \lambda b$ e $b = \lambda c$ portanto $c = \lambda^2 c$. Portanto $\lambda^2 = 1$ ou $c = 0$. O caso $c = 0$ resulta na matriz nula. O caso $\lambda = 1$ está tratado. Resta o caso $\lambda = -1$. Este caso implica $c = -b$. As matrizes, associadas ao valor próprio $\lambda = -1$ são geradas por

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Tomando por base os vectores próprios calculados acima obtemos

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e pela alínea anterior a matriz da aplicação transposta nesta base será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

FIM