E-Fólio A - Resolução

1. Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + x & x \leq 2 \\ \dfrac{\cos(\pi x)}{x^2} - 3x & x > 2. \end{cases}$$

   (a) **[0.1 val.]** Indique o domínio de f.

   O domínio de f é $\mathbb{R}$.

   (b) **[0.3 val.]** Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   Temos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^4 + x),$$

   que conduz a uma indeterminação do tipo $+\infty - \infty$. Esta indeterminação pode ser levantada, tendo em conta que

$$x^4 + x = x(x^3 + 1),$$

   pelo que, como

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} (x^3 + 1) = -\infty,$$

   temos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$$

   Uma possibilidade alternativa de levantar a indeterminação, seria notar que

$$x^4 + x = x^4 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right).$$

   Agora notamos que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

   e

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty,$$

   pelo que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

   Temos também que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cos(\pi x)}{x^2} - 3x\right).$$

Como $-1 \leq \cos(\pi x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, então para $x > 0$, temos

$$\frac{-1}{x^2} \leq \frac{\cos(\pi x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

e como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2},$$

pelo teorema dos limites enquadrados, também

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2} = 0.$$

Sabemos também que

$$\lim_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty$$

logo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty.$$

(c) **[0.5 val.]** Estude a continuidade da função f no seu domínio.

Para $x < 2$, temos $f(x) = x^4 + x$ que sendo uma função polinomial, é uma função elementar, pelo que é contínua. Para $x > 2$, temos $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x^2} - 3x$. Esta é uma função elementar, pois resulta da composição, produto, diferença e quociente de funções básicas (note que o denominador x^2 é sempre positivo para $x > 0$, pelo que, em particular, nunca se anula). Sendo uma função elementar em $]2, +\infty[$, f é contínua para $x > 2$.

Alternativamente poderíamos justificar a continuidade f para $x > 2$ da seguinte forma: a função $\cos(\pi x)$ é a composição da função cosseno com a função polinomial πx, que são ambas contínuas. Como a composição de funções contínuas, é também uma função contínua, concluímos que $\cos(\pi x)$ é uma função contínua. A função x^2 é polinomial, pelo que é contínua. O quociente de funções contínuas é também uma função contínua, desde que o denominador não se anule. Para $x > 2$, o denominador é sempre positivo, pelo que $\frac{\cos(\pi x)}{x^2}$ é uma função contínua. Finalmente $3x$ é uma função polinomial, pelo que é contínua e como a diferença de duas funções contínuas é também uma função contínua, concluímos que para $x > 2$, f é uma função contínua.

Falta apenas estudar a continuidade de f no ponto de mudança de troço, $x = 2$. Temos

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{\cos(\pi x)}{x^2} - 3x \right) = \frac{\cos(2\pi)}{4} - 6 = \frac{1}{4} - 6 = -\frac{23}{4}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(x^4 + x \right) = 2^4 + 2 = 16 + 2 = 18 = f(2).$$

Como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x),$$

a função f não é contínua no ponto $x = 2$. Concluímos que f é contínua em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$, mas não é contínua no ponto $x = 2$.

(d) **[0.2 val.]** Calcule a taxa de variação média de f no intervalo $[0,4]$.
Temos

$$\Delta(f;0,4) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{\frac{\cos(4\pi)}{16} - 12 - 0}{4} = \frac{\frac{1}{16} - 12}{4} = -\frac{191}{64}.$$

2. **[0.7 val.]** Prove por definição de limite que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)x - 2}{2} = -1.$$

Pretendemos provar que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\cos(x)x-2}{2} - (-1) \right| < \epsilon.$$

Temos que

$$\left| \frac{\cos(x)x-2}{2} - (-1) \right| = \left| \frac{\cos(x)x-2+2}{2} \right| = \left| \frac{\cos(x)x}{2} \right| = \frac{|\cos(x)|\,|x|}{2} \leq \frac{|x|}{2},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

porque $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, logo $|\cos(x)| \leq 1$. Por outro lado,

$$\frac{|x|}{2} < \epsilon \iff |x| < 2\epsilon.$$

Assim, qualquer que seja $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = 2\epsilon$, para que, sempre que $|x| < \delta$, se tenha necessariamente $\left| \frac{\cos(x)x-2}{2} - (-1) \right| \leq \frac{|x|}{2} < \epsilon$. Concluímos, portanto, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)x - 2}{2} = -1.$$

3. **[0.75 val.]** Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)\,(x^4 - 2x^3 + x^2)}{(x^3 + 2x^2 - 3x)}.$$

Uma vez que as funções que aparecem no numerador e denominador são ambas contínuas no ponto $x=1$, os respectivos limites, quando x tender para 1, são iguais às suas imagens no ponto 1 e verificamos imediatamente por substituição de x por 1, que temos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Podemos factorizar o numerador,

$$\cos(\pi x)\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) = \cos(\pi x)x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = \cos(\pi x)x^2\,(x-1)^2$$

e para o denominador temos

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3).$$

Reparamos agora que

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \iff x = 1 \vee x = -3,$$

logo

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x-1)(x+3).$$

Então,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(\pi x)\,(x^4 - 2x^3 + x^2)}{(x^3 + 2x^2 - 3x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cos(\pi x)\,(x-1)^2\, x^2}{x(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cos(\pi x)\,(x-1)\, x^2}{x(x+3)},$$

pois o limite não depende do valor da expressão em $x = 1$, e, portanto, podemos fazer o corte do factor $(x-1)$, por este não se anular. Então, concluimos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(\pi x)\,(x^4 - 2x^3 + x^2)}{(x^3 + 2x^2 - 3x)} = \frac{(-1) \times 0 \times 1}{4} = 0.$$

4. **[0.75 val.]** Calcule

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(5n)e^{-n} + 3n^3}{n^3 - 2n^2 + 1}.$$

Temos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(5n)e^{-n} + 3n^3}{n^3 - 2n^2 + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\sin(5n)e^{-n}}{n^3} + \frac{3n^3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} - \frac{2n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\sin(5n)e^{-n}}{n^3} + 3}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}.$$

Agora notamos que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \text{e também} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{\sin(5n)e^{-n}}{n^3} = \frac{\sin(5n)}{e^n n^3}$$

e temos

$$\frac{-1}{e^n n^3} \leq \frac{\sin(5n)}{e^n n^3} \leq \frac{1}{e^n n^3}.$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} e^n n^3 = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty,$$

concluímos que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n n^3} = 0,$$

e, portanto, também

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{e^n n^3} = 0.$$

Pelo teorema dos limites enquadrados,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(5n)}{e^n n^3} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(5n)e^{-n} + 3n^3}{n^3 - 2n^2 + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\sin(5n)e^{-n}}{n^3} + 3}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{0 + 3}{1 - 0 - 0} = 3.$$

5. **[0.7 val.]** Sejam f e g funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = 3\cos(\pi x) + 1, \qquad g(x) = x^3 + 2.$$

Prove que os gráficos das funções f e g se intersectam em pelo menos três pontos.

A função $\cos(\pi x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois é a composição da função cosseno com um polinómio, que são ambas contínuas em $\mathbb{R}$. Então, a função f é contínua em $\mathbb{R}$, pois resulta do produto e soma de funções contínuas (as funções polinomiais são contínuas). Da mesma forma, a função g também é contínua em $\mathbb{R}$, pois é uma função polinomial.

Vamos definir a função

$$h(x) := f(x) - g(x) = 3\cos(\pi x) + 1 - (x^3 + 2) = 3\cos(\pi x) + 1 - x^3 - 2 = 3\cos(\pi x) - x^3 - 1,$$

que é uma função contínua em $\mathbb{R}$, porque é definida como a diferença das duas funções contínuas em $\mathbb{R}$.

Agora temos

$$h(-2) = 3\cos(2\pi) - (-2)^3 - 1 = 10 > 0,$$
$$h(-1) = 3\cos(-\pi) - (-1)^3 - 1 = -3 < 0,$$
$$h(0) = 3\cos(0) - 1 = 2 > 0$$

e

$$h(1) = 3\cos(\pi) - 1^3 - 1 = -5 < 0.$$

Então, h muda de sinal nos intervalos $]-2,-1[$, $]-1,0[$ e $]0,1[$, e pelo teorema de Bolzano existem $r_1 \in]-2,-1[$, $r_2 \in]-1,0[$ e $r_3 \in]0,1[$, tais que

$$h(r_1) = h(r_2) = h(r_3) = 0.$$

Além disso, como os intervalos $]-2,-1[$, $]-1,0[$ e $]0,1[$ são disjuntos, concluímos que r_1, r_2 e r_3 são distintos. Então, por definição da função h, existem pontos distintos r_1, r_2 e r_3 tais que

$$f(r_1) = g(r_1), \quad f(r_2) = g(r_2) \quad \text{e} \quad f(r_3) = g(r_3),$$

e portanto os gráficos das funções f e g intersectam-se em pelo menos três pontos, como se pretendia mostrar.

FIM