

U.C. 21082
Matemática Finita

18 de setembro de 2013

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 8 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7 e 8 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular.
- O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com exceção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

| | | | |
|----|-----|-----|----|
| 5. | 6. | 7. | 8. |
| 3 | 3.5 | 4.5 | 5 |

Nome:

Nº de Estudante: B. I. nº

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sejam X e Y dois conjuntos tais que $X \cap Y = \{a\}$. Se $\#X = n$ e $\#Y = m$, então $\#(X \times Y)$ é igual a

a) $n \times m$

c) $(n - 1) \times m$

b) $(n - 1) \times (m - 1)$

d) $(n - 1) \times (m - 1) + 1$

2. O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(4x + 8)^8$ é igual a:

a) $\binom{8}{6}$

c) $4^8 \binom{8}{6}$

b) $4 \binom{8}{6}$

d) $4^6 8^2 \binom{8}{6}$

3. Relativamente à soma de três quaisquer números inteiros não negativos consecutivos pode afirmar-se:

a) A soma não é divisível por 3

b) A soma é um múltiplo de 3 se a primeira parcela é divisível por 3

c) A soma é divisível por 3 se a última parcela for um múltiplo de 3

d) A soma é um múltiplo de 3

Nome:
N^o de Estudante: B. I. n^o
Turma Assinatura do Vigilante:

4. Relativamente à soma

$$\sum_{k=1}^n (k! - k^k), \quad n > 1,$$

pode dizer-se que ...

- a) a soma é um valor não negativo
 b) a soma é um valor não positivo
 c) a soma é um valor estritamente negativo
 d) a soma é um valor estritamente positivo

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5. No conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$, considere a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 8$.

5.1. Determine o número de soluções em \mathbb{N} desta equação.

5.2. Entre as soluções da alínea anterior, determine:

5.2.1. em quantas $x_1 + x_3$ é um número par.

5.2.2. em quantas x_1 é um número ímpar.

6.

6.1. Por recurso à **convolução de Vandermonde** mostre que

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{n}$$

6.2. Sejam X e Y dois conjuntos disjuntos com a mesma cardinalidade, $\#X = \#Y = k$.
Mostre que o número de subconjuntos de $X \cup Y$ com k elementos é igual a

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2.$$

7. Mostre que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{2n + 1}{2n(n + 1)}$$

por recurso...

7.1. ... ao método de indução matemática.

7.2. ... ao método telescópico.

8. Considere o polinómio

$$p(t) = (t - 2)^3.$$

8.1. Determine a fórmula de recorrência cujo polinómio característico é p .

8.2. Designando por $\langle a_n \rangle$ a solução da fórmula de recorrência encontrada na alínea anterior para as condições iniciais $x_0 = 1$, $x_1 = 6$ e $x_2 = 28$, determine a_n por recurso ao método das funções geradoras.

[Nota: Caso não tenha efectuado a alínea 8.1, considere a fórmula de recorrência $\frac{1}{2}x_n = 3x_{n-1} - 6x_{n-2} + 4x_{n-3}$.]

8.3. Determine o 17º coeficiente da função geradora da sucessão $\langle a_n \rangle$.

Se necessitar, para qualquer exercício, pode recorrer às seguintes fórmulas gerais:

$$\bullet (1 + at)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m}{n} t^n \quad \bullet \frac{1}{(1 - at)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m + n - 1}{n} t^n$$

FIM