U.C. 21117
Topologia

7 de junho de 2017

- O exame é composto por **6** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 1 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- É necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- A cotação das questões é a seguinte:

I	II	III	IV	V	VI
3.0 val.	4.0 val.	3.0 val.	3.0 val.	3.0 val.	4.0 val.

Justifique cuidadosamente todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

I. Seja (X, d) um espaço métrico, e consideremos d_1 definida em $X \times X$ por

$$d_1(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}.$$

Mostre que d_1 define uma métrica sobre X.

II. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y < 1, 0 < x < 1\} \cup \{(\pi, 0)\}.$$

Represente graficamente o conjunto S e determine o seu interior, a sua aderência e a sua fronteira.

III. Seja (X, d) um espaço métrico, e x e y pontos distintos de X.

Mostre que existem conjuntos abertos U e V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

IV. Seja X um espaço topológico compacto, e $f : X \to X$ uma função contínua.

Mostre que o gráfico de f, $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ é compacto em $X \times X$, onde consideramos em $X \times X$ a topologia produto.

V. Seja X um espaço topológico e A e B dois subconjuntos conexos de X tais que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Mostre que $A \cup B$ é conexo.

VI. Seja X um conjunto não vazio, e $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas topologias distintas sobre X.

1. Decida justificadamente se $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ ainda define uma topologia sobre X.
2. Decida justificadamente se $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ainda define uma topologia sobre X.

FIM