Álgebra Linear II
21003 — ano lectivo 2019-2020
6 de abril de 2020

e-fólio A — proposta de resolução

1. Mostre que para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ as matrizes AB e BA têm os mesmos valores próprios.

Resolução:

Vamos dividir a resolução em dois passos, primeiro mostramos para o caso do valor próprio ser zero e, segundo, mostramos o resultado no caso dos valores próprios não-nulos.

Se $\lambda = 0$ é valor próprio de AB então $|AB - \lambda I_n| = |AB| = 0$ o que equivale a $|A| = 0$ ou $|B| = 0$. Daqui resulta $|BA| = |B|\,|A| = 0$, isto é, $\lambda = 0$ é valor próprio de BA.

Seja $\lambda \neq 0$ um valor próprio de AB. Logo existe um vector não-nulo v tal que $(AB)v = \lambda v$, o que equivale a $A(Bv) = \lambda v$, de onde resulta que Bv é um vector não-nulo, pois $\lambda \neq 0$ e $v \neq 0$.

Sendo não-nulo, o vector Bv pode ser vector próprio para algum valor próprio. Vamos mostrar que λ é também valor próprio de BA associado ao vector próprio Bv:

$$(BA)(Bv) = B(A(Bv)) = B(\lambda v) = \lambda(Bv).$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o endomorfismo

$$f(x, y, z) = (-2x - 2y + z, x + y - z, -z).$$

a) Determine a matriz M que representa o endomorfismo f com respeito à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Mostre que a matriz M é diagonalizável e determine a matriz diagonal D e a matriz invertível P tal que $D = P^{-1}MP$.

c) Calcule M^6 recorrendo à diagonalização indicada na alínea anterior.

Resolução:

a) Calculando o valor do endomorfismo nos elementos da base canónica obtemos as colunas da matriz M:

$f(1, 0, 0) = (-2, 1, 0) = -2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$,

$f(0, 1, 0) = (-2, 1, 0) = -2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$,

$f(0, 0, 1) = (1, -1, -1) = 1(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) - 1(0, 0, 1)$,

e, portanto,

$$M = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Calculemos o polinómio característico da matriz M:

$$p_M(\lambda) = |M - \lambda I_3| =$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda + 1)^2.$$

Logo, os valores próprios da matriz M são as soluções da equação $p_M(\lambda) = 0$, isto é, $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$, com multiplicidades algébricas $\text{ma}(-1) = 2$ e $\text{ma}(0) = 1$.

Daqui resulta que $\text{mg}(0) = 1$ e vamos agora calcular a multiplicidade geométrica de -1.

$$M+I_3=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Daqui podemos concluir que $\mathrm{mg}(-1)=3-\mathrm{rank}(M+I_3)=3-1=2$ mas aproveitemos já para determinar M_{-1}, que terá dimensão 2:

$$(M+I_3)X=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow -x_1-2x_2+x_3=0$$

e

$$M_{-1}=\mathcal{N}(M+I_3)=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_1+2x_2\end{bmatrix}:x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}\right\rangle$$

de onde também poderíamos concluir, se ainda não o tivéssemos feito, que a multiplicidade geométrica do valor próprio -1 é $\dim M_{-1}=2=\mathrm{mg}(-1)$. Como $3=\mathrm{mg}(-1)+\mathrm{mg}(0)$ então M é diagonalizável, semelhante à matriz diagonal

$$D=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz de semelhança P correspondem aos vectores próprios de M. Os vectores próprios associados ao valor próprio -1 são os geradores de M_{-1}, vamos agora calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda=0$.

$$M-0I_3=M=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_1\\ L_2\leftarrow L_2+2L_1}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_2\\ L_3\leftarrow L_3-L_2}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$MX=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2 & = & 0\\ -x_3 & = & 0\end{cases}$$

e

$$M_0 = \mathcal{N}(M) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x1 \\ 0 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Portanto

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) As matrizes M e D são semelhantes, $D = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$, de onde resulta $M^k = PD^kP^{-1}$ para $k \in \mathbb{N}$ (ver exercício 1 da Af1).

Sendo

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

temos

$$M^6 = PD^6P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^6 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^6 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de A, bem como as suas multiplicidades algébricas e geométricas.

b) Suponha que não conhece a matriz A e apenas tem acesso aos resultados da alínea a). Indique todas as possíveis formas canónicas de Jordan com base nesses resultados.

c) Determine J, a forma canónica de Jordan da matriz A.

d) Determine a matriz invertível Q tal que $J = Q^{-1}AQ$.

Resolução:

a) Calculemos o polinómio característico da matriz A:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_5| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1-\lambda)(2-\lambda)^4.$$

Logo, os valores próprios da matriz A são as soluções da equação $p_A(\lambda) = 0$, isto é, $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$, com multiplicidades algébricas $\text{ma}(1) = 1$ e $\text{ma}(2) = 4$.

Daqui resulta que $\mathrm{mg}(1) = 1$ e vamos agora calcular a multiplicidade geométrica de 2.

$$A - 2I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow -L_4 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de onde resulta $\mathrm{mg}(2) = 5 - \mathrm{rank}(A - 2I_5) = 5 - 3 = 2$.

b) Vamos seguir os passos do Sumário (página 64 do Capítulo 1 do texto de apoio) segundo a notação aí utilizada.

Passo 1. Temos $k = 2$ valores próprios distintos, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, e conhecemos $\mathrm{ma}(1) = 1 = \alpha_1$ e $\mathrm{ma}(2) = 4 = \alpha_2$, bem como $\mathrm{mg}(1) = 1 = \gamma_1$ e $\mathrm{mg}(2) = 2 = \gamma_2$.

Então podemos concluir:

- que a matriz de Jordan é diagonal e tem $k = 2$ blocos, $J^{(1)}$ e $J^{(2)}$;
- que o bloco $J^{(1)}$ tem dimensão $1 = \alpha_1$, correspondendo ao valor próprio $\lambda_1 = 1$, e o bloco $J^{(2)}$ tem dimensão $4 = \alpha_2$, sendo uma matriz diagonal por blocos em que cada bloco é uma célula de Jordan com o valor próprio $\lambda_2 = 2$;
- que o número de células de Jordan que constituem $J^{(1)}$ é $1 = \gamma_1$, e o número de células de Jordan que constituem $J^{(2)}$ é $2 = \gamma_2$.

Como estamos a supor que não conhecemos a matriz A mas apenas os resultados da alínea a), não podemos passar ao passo 2 do Sumário. Assim, podemos concluir que o caso de $J^{(1)}$ é simples e corresponde a uma entrada igual a $\lambda_1 = 1$ na diagonal principal da forma canónica de Jordan, enquanto que $J^{(2)}$, tendo dimensão 4 e duas células, pode corresponder a uma célula de dimensão 1 e outra de dimensão 3 ou, em alternativa, a duas células de dimensão 2. Logo, as formas canónicas de Jordan possíveis, apenas com base nos resultados da alínea a), são

$$\left[\begin{array}{c|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

c) Para saber qual das hipótese anteriores é a forma canónica de Jordan semelhante à matriz A, teremos de prosseguir para o passo seguinte do Sumário, apenas no que respeita ao valor próprio $\lambda_2 = 2$.

Passo 2. Vamos calcular a dimensão dos espaços $\mathcal{N}(A - 2I_5)$, $\mathcal{N}(A - 2I_5)^2$, $\mathcal{N}(A - 2I_5)^3$, etc, até essa dimensão não variar.

Dos cálculos que já efectuámos podemos concluir que

$$(A-2I_5)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_2 - x_5 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

e

$$M_2 = \mathcal{N}(A - 2I_5) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

isto é, $\dim\mathcal{N}(A - 2I_5) = 2$.

Calculemos agora $\dim\mathcal{N}(A - 2I_5)^2$. A matriz $(A - 2I_5)^2$ é

$$(A - 2I_5)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\mathcal{N}(A-2I_5)^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

e, portanto, $\dim \mathcal{N}(A-2I_5)^2 = 4$.

A matriz $(A-2I_5)^3$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto $\dim \mathcal{N}(A-2I_5)^3 = \dim \mathcal{N}(A-2I_5)^2 = 4$, isto é a dimensão não varia do expoente 2 para o expoente 3. Logo $\nu_2 = 2$ é a dimensão da maior célula de Jordan que integra $J^{(2)}$ e

$$J = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

d) Neste caso já determinámos a dimensão das células de Jordan e não precisamos de usar o Passo 3. Para obter a matriz Q precisamos de calcular os vectores próprios e vectores próprios generalizados associados aos valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_1 = 1$, temos

$$A - I_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_5 \\ L_4 \leftrightarrow L_5}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$M_1 = \mathcal{N}(A - I_5) == \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Para $\lambda_2 = 2$ teremos duas cadeias de Jordan, uma associada a cada célula, cujos vectores próprios generalizados determinamos a partir de cada um dos vectores linearmente independentes de $M_2 \cap \mathrm{Im}(A - 2I_5)$. Como $\dim M_2 = 2$ então essa intersecção terá de dar M_2 e poderemos usar cada um dos vectores próprios já calculados.

> Embora neste caso (pelo argumento dado acima) não seja necessário calcular, os elementos de $\mathrm{Im}(A - 2I_5)$ são da forma
>
> $$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 & -x_1 - x_2 & -2x_1 - x_2 - x_5 & -x_4 & -x_1 - x_2 \end{bmatrix}^T ,$$
>
> para x_k arbitrários, ou $\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & \beta & \gamma & -\alpha \end{bmatrix}^T$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. É facil de ver que os vectores próprios já calculados estão neste conjunto (um deles para $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma = 0$, e outro para $\beta = 1$ e $\alpha = \gamma = 0$), de onde resulta $M_2 \cap \mathrm{Im}(A - 2I_5) = M_2$.

O vector próprio $u = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ está na mesma cadeia de Jordan do vector próprio generalizado p tal que:

$$(A - 2I_5)p = u \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 & = 1 \\ -2p_1 - p_2 - p_5 & = 0 \\ p_4 & = 0 \end{cases}$$

de onde obtemos o vector $p = \begin{bmatrix} p_1 & 1 - p_1 & p_3 & 0 & -p_1 - 1 \end{bmatrix}^T$ o que, para $p_1 = 0 = p_3$, dá

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Analogamente, o vector $v = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ está na mesma cadeia de Jordan do vector próprio generalizado q tal que:

$$(A-2I_5)q = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\\ q_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_1+q_2 &= 0\\ -2q_1-q_2-q_5 &= 1\\ q_4 &= 0\end{cases}$$

de onde obtemos o vector $q = \begin{bmatrix}q_1 & -q_1 & q_3 & 0 & -1-q_1\end{bmatrix}^T$ o que, para $q_1 = 0 = q_3$, dá

$$q = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz de semelhança é

$$Q = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

onde são ordenados os vectores de acordo com as cadeias de Jordan envolvidas (ver alínea e) do Teorema 1.55, página 45), nas posições correspondentes às células de Jordan de $J^{(2)}$. Neste caso escolhemos a ordem $u-p-v-q$ mas poderíamos também ter escolhido $v-q-u-p$.