Elementos de Probabilidade e Estatística | 21037

Tópicos de resolução do exame de 18 de setembro de 2020

1. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F). **Caso a afirmação seja falsa justifique o motivo**. Por cada resposta errada será descontado 0.5 valores.

   1.1 Numa distribuição normal, aproximadamente 95% dos dados encontram-se no intervalo $[\overline{x} - 1.5s,\ \overline{x} + 1.5s]$.

   Falso. O correto é: Numa distribuição normal, aproximadamente 95% dos dados encontram-se no intervalo $[\overline{x} - 2s,\ \overline{x} + 2s]$.

   1.2 O grau de assimetria de Bowley não pressupõe o conhecimento da média e o desvio-padrão amostrais.

   Verdadeiro.

   1.3 Sejam A e B dois acontecimentos independentes. Então, os acontecimentos A e $\overline{B}$ são dependentes.

   Falso. O coreto é: Sejam A e B dois acontecimentos independentes. Então, os acontecimentos A e $\overline{B}$ são independentes.

   1.4 Seja X uma variável aleatória contínua e $F(x)$ a sua função distribuição. A igualdade $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ verifica-se quando $b < a$.

   Falso. O correto é: Seja X uma variável aleatória contínua e $F(x)$ a sua função distribuição. A igualdade $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ verifica-se quando $a < b$.

   1.5 Numa distribuição binomial com $p < 0.5$ existe simetria positiva.

   Verdadeiro.

   1.6 Considere que o tempo de viagem de carro entre duas cidades segue uma distribuição uniforme entre 100 a 120 minutos. A proporção de viagens que demora menos de 110 minutos é 0.25.

   Falso. O correto é: $P(X < 110) = (110 - 100) \times 0.05 = 0.5$, onde X ="variável aleatória que representa o tempo de viagem de carro enmtre duas cidades" e $X \sim U(100; 120)$.

2. Um “full house” consiste num conjunto de três cartas com o mesmo valor mais duas cartas de outro valor. Sabendo que num naipe existem 13 cartas diferentes (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13) repetidas por 4 naipes (espadas (S), copas (H), ouros (D) e paus (C)), num total de 52 cartas, calcule quantos “full house” diferentes existem no jogo de poker.
Exemplos de “full house”: 2D,2S,2H,3C,3S ou $1C, 1H, 1S, 2C, 2S$.

Resolução:

- Escolha de uma carta de um naipe para o primeiro conjunto de 3 cartas: 13 opções.
- Escolha de uma carta de um naipe para o segundo conjunto de 2 cartas: 12 opções (retira-se uma opção pois anteriormente já se escolheu uma carta).
- Escolhem-se 3 cartas de entre os 4 naipes existentes.
- Escolhem-se 2 cartas de entre os 4 naipes existentes.
- Cálculo final: $13 \times 12 \times C_3^4 \times C_2^4 = 3744.$

3. Considere uma variável aleatória X função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{para } -1 < x < 0 \\ 1 - x & \text{para } 0 < x < 1. \end{cases}$$

3.1 Determine o valor $P(X < 0.5)$.

Resolução:

$P(X < 0.5) = \int_{-1}^{0} 0.5dx + \int_{0}^{0.5} 1 - xdx = 0.5 + 0.5 - 0.125 = 0.875.$

3.2 Admita que X representa o índice de qualidade de um artigo. Assim, cada artigo vendido gera um lucro dado por $L = 12X + 5$. Em média, qual o lucro obtido com a venda de um artigo?

Resolução:

$E[L] = E[12X + 5] = 12E(X) + 5.$

$E[X] = \int_{-1}^{0} 0.5xdx + \int_{0}^{1} x(1 - x)dx = -1/12.$

Logo, $E[L] = 4$, ou seja, em média o lucro obtido com a venda de um artigo é igual a 4 unidades monetárias.

4. Uma empresa, monopolista no mercado de determinado produto, tem produção constante de 90 toneladas por mês. Sabe-se que a procura mensal é uma variável aleatória com distribuição normal com média 80 toneladas e desvio padrão 10 toneladas.

4.1 Determine a probabilidade da procura ser inferior a 78 toneladas.

Resolução:

Seja X a variável aleatória que representa a procura em toneladas do produto da empresa. $X \sim N(\mu = 80, \sigma = 10)$.

$P(X < 78) = P(Z < \frac{78-80}{10}) = \Phi(-0.2) = 0.4207.$

4.2 Calcule a probabilidade de ocorrer procura excedentária.

Resolução:

$P(X > 90) = 1 - P(X < 90) = 1 - P(Z < \frac{90-80}{10}) = 1 - \Phi(1) = 0.1587.$

4.3 Qual a percentagem de meses em que a procura se situa entre 77 e 82 toneladas?

Resolução:

$P(77 < X < 82) = P(\frac{77-80}{10} < Z < \frac{82-80}{10}) = \Phi(0.2) - \Phi(-0.3) = 0.1972.$

4.4 Qual deve ser a produção mínima mensal para que a probabilidade de ocorrer procura excendentária seja 0.25?

Resolução:

$P(X > k) = 0.25 \iff 1 - P(X \leq k) = 0.25 \iff P(Z < \frac{k-80}{10}) = 0.75 \iff \Phi(\frac{k-80}{10}) = \Phi^{-1}(0.75) \iff \frac{k-80}{10} = 0.68 \iff k = 86.8.$
Portanto, a empresa deve produzir pelo menos 86.8 toneladas por mês.

Critérios de avaliação e cotação | A cotação total deste Exame é de 20 valores distribuídos do seguinte modo:

Questão	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	4.4
Cotação	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	4.0	2.0	2.0	1.0	2.0	1.0	2.0

FIM