**21165 - Geometria**
Ano lectivo 2021/22
Docente: António Araújo

# e-fólio A

## Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 1 página com 3 problemas e termina com a palavra FIM.
- Como o e-fólio tem um tempo prolongado de resolução, espera-se que as respostas que enviar estejam legíveis, com boa apresentação e organização. Deve fazer à parte o trabalho auxiliar e enviar apenas uma versão final, "limpa". Deve digitalizar a sua resolução de forma legível, ou executá-la directamente em formato digital (aceita-se word, pdf, ou scans em jpeg, png ou tiff - se usar varios ficheiros envie apenas um arquivo com todos eles, em rar ou zip). Respostas ilegíveis não serão cotadas, por isso verifique bem o seu ficheiro antes de enviar.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Tenha em atenção o prazo de entrega do e-fólio e as indicações para submeter a resolução disponibilizadas na sala de aulas virtual.
- O e-fólio é um trabalho individual. Pode utilizar recursos externos (pesquisa online, literatura, etc) mas não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os seus colegas.

## Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores, assim distribuídos: questão 1 e 3: 1,4 valores cada. Questão 2: 1,2 valores.

**Problema 1.** *Considere o plano de incidência das cúbicas de* $\mathbb{R}^2$*, assim definido: os pontos são os pontos ordinários de* $\mathbb{R}^2$*. As linhas são de dois tipos:*

*I) as rectas verticais de* $\mathbb{R}^2$

*II) as curvas cúbicas da forma*

$$y = (ax + b)^3$$

*com* $a, b$ *números reais.*

*a) Obtenha a linha do plano das cúbicas que passa pelos pontos* $P = (8, 8)$*,* $Q = (1, 1)$*.*

*b) Seja* $l$ *a linha* $y = x^3$*. Obtenha uma linha paralela a* $l$ *que passe por* $P = (3, 2)$*.*

*c) Diga, justificando, se o plano das cúbicas é afim.*

**Problema 2.** *Considere o modelo de Moulton (página 20 do manual). Existirão conjuntos convexos do plano euclideano que não são convexos no plano de Moulton? Existirão conjuntos convexos no plano de Moulton que não o são no plano euclideano? Justifique.*

**Problema 3.** *Para qualquer par* $X$ *e* $Y$ *de sub-conjuntos de* $\mathbb{R}^2$ *definimos a "distância H" entre* $X$ *e* $Y$ *pela expressão*

$$d_H(X, Y) = \inf \{\varepsilon > 0 : X \subset Y_\varepsilon \text{ e } Y \subset X_\varepsilon\}$$

*onde* inf *é o ínfimo, e* $X_\varepsilon$ *é a união dos discos euclideanos de raio* $\varepsilon$ *centrados em pontos de* $X$*, ou seja:*

$X_\varepsilon = \cup_{x \in X} \{p \in \mathbb{R}^2 : d_E(p, x) \leq \varepsilon\}$*, em que* $d_E$ *é a distância Euclideana ordinária.*

*a) Mostre que* $d_H$ *se reduz à distância euclideana* $d_E$ *quando os conjuntos* $X$ *e* $Y$ *são ambos pontos. Verifique ainda se também se reduz à distância usual de um ponto a uma recta quando* $X$ *é um ponto e* $Y$ *é uma recta.*

*b) Calcule:*

*i)* $d_H(C_1, C_2)$ *onde os* $C_1, C_2$ *são duas circunferências de* $\mathbb{R}^2$ *de raios respectivamente* $r$ *e* $R$*,* $r > R$*, que se tocam num único ponto.*

*ii)* $d_H(P, S)$ *onde* $P$ *é um ponto e* $S$ *é uma circunferência de raio* $R$ *e centro* $C$*.*

*iii)* $d_H(l_1, l_2)$ *onde os* $l_1, l_2$ *são duas rectas euclideanas paralelas (assumindo que conhece a distância euclideana entre as rectas).*

*iv)* $d_H(l_1, l_2)$ *onde os* $l_1, l_2$ *são duas rectas euclideanas de* $\mathbb{R}^2$ *que se tocam num único ponto.*

*c) Será verdade que* $d_H(X, Y) = 0$ *para dois conjuntos* $X$ *e* $Y$ *se e só se* $X = Y$*? Será verdade que* $d_H(X, Y)$ *é finita para quaisquer* $X, Y$*? Sugira que restrições poderíamos colocar aos conjuntos* $X$ *e* $Y$ *para que ambas as afirmações se tornassem verdadeiras.*

**FIM**