,

U.C. 21157

Cálculo para Informática

24 de Julhode 2017

-- INSTRUÇÕES --

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por **2** páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.
- Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este exame tem a cotação total de 20 valores, distribuídos do seguinte modo: Grupo I: 4 valores, Grupo II: 9 valores, Grupo III: 7 valores.
- Não é permitida a utilização de quaisquer tabelas ou formulários.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular.

Grupo I (4 valores)

Prove que a sucessão x_n tal que $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \sqrt{ax_n}$ e $a \geq 4$ é convergente e calcule o seu limite.

Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ então deverá ter-se que $x = \sqrt{ax}$ uma vez que $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} x$ pois x_{n+1} é uma subsucessão de x_n e se uma sucessão é convergente todas as suas subsucessões são convergentes e têm como limite o limite da sucessão dada e $\sqrt{x_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{x}$ pois $f(x) = \sqrt{ax}$ é uma função contínua.

Resolvendo a equação $x = \sqrt{ax}$ tem-se $x^2 = ax$ que tem como soluções $x = 0$ ou $x = a$ por outro lado a sucessão x_n é uma sucessão crescente, vamos provar que é uma sucessão crescente por indução $x_2 = \sqrt{a} \geq 2 > 1 = x_1$ e se $x_{n+1} > x_n$ então $x_{n+2} = \sqrt{ax_{n+1}} > \sqrt{ax_n} = x_{n+1}$ logo $x = 0$ não é limite da sucessão.

Se provarmos que $x_n < a$ todo o $n \in N$, então $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$ uma vez que toda a sucessão crescente e limitada superiormente é convergente e vimos que no caso de ser convergente o seu limite é a vamos provar por indução que $x_n < a$ todo o $n \in N$, $x_1 = 1 < a$ se $x_n < a$ então $x_{n+1} = \sqrt{ax_n} < \sqrt{a^2} = a$ donde o resultado.

Grupo II (9 valores)

1. Prove que a função $f(x) = x^{12} + x^2 - 1$ tem dois e somente dois zeros em *R*.

$f(0) = -1 < 0$ e $f(\pm 1) = 1 > 0$ logo como se $h : [a,b] \to R$ é contínua com $h(a)$ e $h(b)$ de sinais contrários h tem pelo menos um zero em $]a,b[$ tem-se que a função $f(x)$ tem pelo menos dois zeros um no intervalo $]-1,0[$ e outro no intervalo $]0,1[$ por outro lado $f'(x) = 12x^{11} + 2$ se existissem mais do que dois zeros a função $f'(x)$ teria pelo menos dois zeros ora $f'(x)$ só tem um zero donde o resultado,

2. Calcule $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\log\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\frac{1}{1-\cos(x)}\right)$ e

$\lim_{x\to 0}\exp\left(\log\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\frac{1}{1-\cos(x)}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\frac{1}{1-\cos(x)}\right)$

vamos calcular $\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\frac{1}{1-\cos(x)}$ aplicando a regra de Cauchy tem-se que

$\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\frac{1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{a(x)}{sen(x)}$ em que

$a(x) = \frac{\frac{x\cos(x)-sen(x)}{x^2}}{\frac{sen(x)}{x}}$ e como $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{a(x)}{sen(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-sen(x)}{x^2 sen(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-sen(x)}{x^3}$ logo aplicando de novo a regra de Cauchy tem-se que

$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-sen(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-xsen(x)-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{3x} = \frac{-1}{3}$

logo o limite pretendido é $\exp\left(\frac{-1}{3}\right)$

3. Determine o máximo da função $f(x,y) = x^2 y$ quando x e y são números positivos tal que $x + y = 150$

Sejam x, y números tal que $x + y = 150$ queremos maximizar a função $P(x) = x^2(150 - x)$ tem-se que $P'(x) = 300x - 3x^2$ que se anula para $x = 100$ que é o ponto em que a função $P(x)$ atinge o máximo pois $P''(100) = -300$ e é único pois a derivada tem um único zero e está definida em R logo o produto pretendido é
$P(100) = 500000$

Grupo III (7 valores)

Calcule

a) $\int sen(2x)\cos(x)dx \ \ (x > 0)$

atendendo a que $sen(2x) = 2sen(x)\cos(x)$ temos
$\int sen(2x)\cos(x)dx = \int 2sen(x)\cos^2(x)dx = -2\int -sen(x)\cos^2(x)dx$ temos uma primitiva do tipo $\int f(\varphi(x))\dot{\varphi}(x)dx$ tendo-se $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + k$ em que $F(z) = \int f(z)dz$ em que $\varphi(x) = \cos(x)$ e $f(u) = u^2$ obtemos como primitiva
$\frac{-2}{3}\cos^3(x) + k$

b) $\int \frac{sen(x)}{\cos^2(x) - 4\cos(x) + 5}dx$

Multiplicando a primitiva dada e a função a primitivar por –1 temos uma primitiva do tipo $\int f(\varphi(x))\dot{\varphi}(x)dx$ tendo-se $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + k$ em que $F(z) = \int f(z)dz$ em que $\varphi(x) = \cos(x)$ e $f(u) = \frac{1}{u^2 - 4u + 5}$ ora $u^2 - 4u + 5 = (u-2)^2 + 1$ logo
$\int \frac{1}{u^2 - 4u + 5} = arctg(u - 2) + k$ logo a primitiva pretendida é
$-arctg(\cos(x) - 2) + k$

FIM