ÁLGEBRA LINEAR I | 21002 | e-fólio B

Proposta de resolução

Esta resolução destina-se a verificar a correção do e-fólio. Não se destina a estudo ou revisão (em vez disso, use as resoluções das atividades formativas).

Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos. Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nos e-fólios.

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo.

- Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira.
- Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

1. Seja A uma matriz triangular 4×4, e $p(\lambda) = (3-\lambda)^2(\lambda+1)(\lambda-1)$ o seu polinómio característico.

Considere as seguintes afirmações:

i) $\operatorname{tr} A = 6$.

ii) $\det A = 9$.

iii) A tem subespaços próprios de dimensão 1.

iv) A tem subespaços próprios de dimensão 2.

Então a lista completa de afirmações verdadeiras, para tudo A satisfazendo as condições do exercício, é:

☐ **a)** ii) e iii).

☐ **b)** i), iii) e iv).

☐ **c)** i) e iii).

☐ **d)** ii), iii) e iv).

Resolução: Os valores próprios de A são os raizes de p: $\lambda_1 = 3$ (com multiplicidade algébrica 2), $\lambda_2 = -1$ (com multiplicidade algébrica 1) e $\lambda_3 = 1$ (com multiplicidade algébrica 1). Pois A é uma matriz triangular, o diagonal de A contem os valores própios (com seus mutliplicades algébricas): 3 (duas vezes), -1 e 1.

Portanto $\operatorname{tr} A = 3 + 3 + (-1) + 1 = 6$, e i.) é verdadeiro.

Além disso, $\det A = 3 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -9$, e ii.) é falso.

Pois 1 tem multiplicidade algébrica 1, tem multiplicidade geométrica 1. Portanto, E_1 tem dimensão 1 e iii. é verdadeiro.

Considere $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com polinómio caraterístico p. Então $E_3 = \langle (1,0,0,0) \rangle$, $E_{-1} = \langle (0,0,1,0) \rangle$ e $E_1 = \langle (0,0,0,1) \rangle$, e iv. é falso.

Portanto c) é verdadeiro e a.,b.,d. são falso.

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $f((x,y,z)) = \begin{bmatrix} x-z & y-z \\ z-x & 0 \end{bmatrix}$.

f é uma aplicação linear, que pode assumir sem justificação.

Então:

- ☐ **a)** $\operatorname{Nuc} f = \{(0,0,0)\}$.
- ☐ **b)** $\operatorname{Nuc} f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ **c)** $\operatorname{Im} f$ tem dimensão 2.
- ☐ **d)** $\operatorname{Im} f = \operatorname{Nuc} f$.

Resolução:

a) e b) são falsos, porque $f((1,1,1) = 0_{2\times 2}$, que é o elemento neutro de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Portanto $(1,1,1) \in \operatorname{Nuc} f$, em contrário de a) e b)

c) é verdadeiro: $f(0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $f(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Estes matrices são independentes (detalhes omitidas).

Portanto $\dim \operatorname{Im} f \geqslant 2$.

Mas $(1,1,1) \in \operatorname{Nuc} f$. Pois $\dim \operatorname{Nuc} f \geqslant 1$, e $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Nuc} f \leqslant 3 - 1 = 2$.

Portanto $\dim \operatorname{Im} f = 2$

d) é falso, porque $(1,1,1) \in \operatorname{Nuc} f$, mas $\operatorname{Im} f \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $(1,1,1) \notin \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear.

Então, para tudo g satisfazendo as condições do exercício:

- ☐ **a)** $-g(1,1,1,1) = (-1,-1,-1)$.
- ☐ **b)** $-g(1,2,3,4) = g(1,1,1,1) - g(0,1,2,3)$.
- ☐ **c)** $g(0,0,0,1) = (0,0,0)$.
- ☐ **d)** $-g(2,0,2,0) = 2g(-1,0,-1,0)$.

Resolução:

a) é falso: Se $g(x,y,z,w) = (0,0,0)$, então $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear, mas $-g(1,1,1,1) = (0,0,0) \neq (-1,-1,-1)$

b) é falso: Se $g(x,y,z,w) = (x,y,z)$, então $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear, mas $-g(1,2,3,4) = (-1,-2,-3) \neq (1,0,-1) = g(1,1,1,1) - g(0,1,2,3)$

c) é falso: Se $g(x,y,z,w) = (y,z,w)$, então $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear, mas $g(0,0,0,1) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$

d) é verdedeiro: Temos

$$-g(2,0,2,0) = (-1)g(2,0,2,0) = g((-1)2,(-1)0,(-1)2,(-1)2) = g(-2,0,-2,0)$$

(a primeira igualidade é verdadeiro em cada espaço vetorial; a segunda é verdadeiro porque g é uma aplicação linear)

Além disso, $2g(-1,0,-1,0) = g(2(-1),2{\cdot}0,2(-1),2{\cdot}0) = g(-2,0,-2,0)$, porque g é uma aplicação linear.

Portanto, d) é verdadeiro.

4. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Então:

- ☐ **a)** Se $\alpha \neq 0$ então A_α não tem valores próprios.
- ☐ **b)** A_α tem 2 valores próprios distintos $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- ☐ **c)** Se $\alpha = 0$ então A_0 não tem 2 valores próprios distintos.
- ☐ **d)** Existem valores de α para os quais os valores próprios de A_α são -3 e 5.

Resolução:

a.) é falso. Se $\alpha = 1 \neq 0$, então

$$A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto 2 é um valor próprio de A_1.

b) é verdadeiro: O polinómio característico de A_α é $(\alpha - \lambda)^2 - 1$. Portanto, λ é um valor próprio de A_α se e só se

$$(\alpha - \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow (\alpha - \lambda) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow -\lambda = -\alpha \pm 1 \Leftrightarrow (\lambda = \alpha + 1 \text{ ou } \lambda = \alpha - 1.)$$

b) é verdadeiro, porque $\alpha - 1 \neq \alpha + 1 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

c) é falso, porque contradiz b).

d) é falso. Os valores próprios de A_α são $\lambda_1 = \alpha + 1$ é $\lambda_2 = \alpha - 1$ (alinha b.). Temos $|\lambda_1 - \lambda_2| = |\lambda_2 - \lambda_1| = 2$, mas $|5 - (-3)| = |(-3) - 5| = 8$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Seja $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[z]$ a aplicação definida por

$$T(p)(z) = p'(3z + 1), \ \forall p \in \mathbb{R}_3[z],$$

ondo p' é a derivada de p. Por exemplo, se $p(x) = 2x^3 + 4x$, então

$$T(p)(z) = 2 \cdot 3(3z + 1)^2 + 4 = 54z^2 + 36x + 10.$$

Sejam

$$\mathcal{B} = \left(x^3,\ x^3 + x^2,\ x^3 + x^2 + x, x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

uma base de $\mathbb{R}_3[x]$, e $\mathcal{B}' = (1,\ 1 + z,\ 1 + z + z^2)$ uma base de $\mathbb{R}_2[z]$.

i) Mostre que T é uma aplicação linear.
Resolução: Sejam $p, q \in \mathbb{R}_3[x]$, então

$$T(p + q)(z) = (p + q)'(3z + 1) = (p' + q')(3z + 1)$$
$$= p'(3z + 1) + q'(3z + 1) = T(p)(z) + T(q)(z).$$

Sejam $p \in \mathbb{R}_3[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$T(\alpha p)(z) = (\alpha p)'(3z+1) = (\alpha p')(3z+1) = \alpha p'(3z+1) = (\alpha T(p))(z).$$

Portanto T é uma aplicação linear.

ii) Determine justificadamente $\operatorname{Nuc} T$ e $\operatorname{Im} T$.
Resolução: O elemento neutro de $\mathbb{R}_2[z]$ é o polinónio zero p_0. Temos $p_0(z) = 0 = p_0(3z+1)$ e se $p \in \mathbb{R}_2[z] \backslash \{p_0\}$, então $p(3z+1) \neq p_0$. Portanto $T(p)(z) = p'(3z + 1) = p_0(z)$ se é só se $p' = p_0$ se e só se p é um polinómio constante.
Portanto, $\operatorname{Nuc} T = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p = a \text{ para algum } a \in \mathbb{R}\}$.
$\operatorname{Nuc} T = \langle p_1 \rangle$, ondo p_1 é o polinónio constante com imagem $\{1\}$.
Pois $\operatorname{Nuc} T$ tem dimensão 1, e a dimensão de $\operatorname{Im} T$ e

$$\dim(\mathbb{R}_3[x]) - \dim(\operatorname{Nuc} T) = 4 - 1 = 3.$$

Portanto, $\operatorname{Nuc} T = \mathbb{R}_2[z]$.

iii) Determine justificadamente $A = \mathcal{M}(T;\, \mathcal{B},\, \mathcal{B}')$.

Resolução: Para tudo $e_i \in \mathcal{B}$, precisamos calcular os coeficientes de $T(e_i)$ na base $\mathcal{B}'$. Temos

$$T(x^3)(z) = 3(3z+1)^2 = 27z^2 + 18z + 3 = 27(z^2+z+1) - 9z - 24$$

$$= 27(1+z+z^2) - 9(1+z) - 15 = -15(1) + (-9)(1+z) + 27(1+z+z^2)$$

$$T(x^3+x^2)(z) = 3(3z+1)^2 + 2(3z+1) = 27(1+z+z^2) - 9(1+z) - 15(1) + 6(1+z) - 4(1)$$

$$= 27(1+z+z^2) - 3(1+z) - 19 = -19(1) + (-3)(1+z) + 27(1+z+z^2)$$

$$T(x^3+x^2+x)(z) = 3(3z+1)^2 + 2(3z+1) + 1$$

$$= 27(1+z+z^2) - 3(1+z) - 19(1) + 1(1) = -18(1) + (-3)(1+z) + 27(1+z+z^2)$$

$$T(x^3+x^2+x+1)(z) = 3(3z+1)^2 + 2(3z+1) + 1$$

$$= -18(1) + (-3)(1+z) + 27(1+z+z^2)$$

Portanto,

$$A = \mathcal{M}(T;\, \mathcal{B},\, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -15 & -19 & -18 & -18 \\ -9 & -3 & -3 & -3 \\ 27 & 27 & 27 & 27 \end{bmatrix}.$$

iv) Considere $\mathcal{B}'' = (z-1,\, z^2+z-1,\, z^2+1)$ uma base de $\mathbb{R}_2[z]$. Determine justificadamente a matriz de mudança de base $Q \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{M}(T;\, \mathcal{B},\, \mathcal{B}'') = QA$.

Resolução: Para tudo $e_i \in \mathcal{B}'$, precisamos calcular os coeficientes de e_i na base $\mathcal{B}''$. Temos

$$1 = (1)(z-1) + (-1)(z^2+z-1) + (1)(z^2+1)$$

$$1 + z = (3)(z-1) + (-2)(z^2+z-1) + (2)(z^2+1)$$

$$1 + z + z^2 = (2)(z-1) + (-1)(z^2+z-1) + (2)(z^2+1)$$

Portanto,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

III. Seja $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i) Determine justificadamente os valores próprios da matriz C.

Resolução: O polinómio caracteristico de C é

$$\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\det\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)((-\lambda)^3+1+1-(-\lambda)-(-\lambda)-(-\lambda) = (3-\lambda)(-\lambda^3+3\lambda+2)$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+2) = (3-\lambda)(-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

Portanto, os valores próprios de C são $-1, 2, 3$.

ii) Determine justificadamente o espaço próprio associado a cada um dos valores próprios da matriz C.

Resolução:E_{-1} é o espaço nulo de $C-(-1)I_4$

$$= \begin{bmatrix} 3-(-1) & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0-(-1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0-(-1) & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Este matrix é equivalente por linhas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(detalhes omitidas)

Portanto $E_{-1} = \{(0, -z-w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} = \langle (0,-1,1,0), (0,-1,0,1) \rangle$.

E_2 é o espaço nulo de $C-2I_4$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Este matrix é equivalente por linhas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(detalhes omitidas)
Portanto $E_2 = \{(0, w, w, w) : w \in \mathbb{R}\} = \langle(0, 1, 1, 1)\rangle$.
E_3 é o espaço nulo de $C - 3I_4$

$$= \begin{bmatrix} 3-3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0-3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Este matrix é equivalente por linhas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(detalhes omitidas)
Portanto $E_3 = \{(\frac{4}{3}w, \frac{5}{3}w, \frac{4}{3}w, w) : w \in \mathbb{R}\} = \langle(4, 5, 4, 3)\rangle$.

iii) Determine justificadamente a multiplicidade algébrica e a a multiplicidade geométrica de cada valor próprio da matriz C.
Resolução: Usando linhas i) e ii), temos ma(-1)=mg(-1)=2, ma(2)=mg(2)=1, ma(3)=mg(3)=1.

Fim