UNIDADE CURRICULAR: Matemática Finita

CÓDIGO: 21082

DOCENTES: Gilda Ferreira e Ana Nunes

Resolução e Critérios de Correção

1. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a, b) = 12$. Relativamente à equação

$$ax + by - 347 = 0$$

podemos afirmar que: (Escolha a opção correta)

a) Admite mais do que duas soluções inteiras em x e y.

b) Admite exatamente duas soluções inteiras em x e y.

c) Admite exatamente uma solução inteira em x e y.

d) Não admite solução inteira em x e y.

Resolução: Como $a, b, 347 \in \mathbb{Z}$, pelo Corolário 1.8 do Texto "Divisibilidade" sabemos que a equação $ax + by - 347 = 0$ admite solução inteira em x e y se, e somente se, $mdc(a, b) \mid 347$. Como $mdc(a, b) = 12 \nmid 347$ (347 é número primo), concluímos que a equação dada não admite solução inteira em x e y. Logo a opção correta é a d).

2. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $5^k \mid 800!$ e $5^{k+1} \nmid 800!$. Temos que: (Escolha a opção correta)

a) $k = 198$

b) $k = 199$

c) $k = 200$

d) Nenhuma das opções anteriores

Resolução: Sendo 5 um número primo, pela Proposição Fatores do Fatorial sabemos que a maior potência de 5 que divide 800! é 5^k com

$$k = \lfloor \frac{800}{5} \rfloor + \lfloor \frac{800}{5^2} \rfloor + \lfloor \frac{800}{5^3} \rfloor + \lfloor \frac{800}{5^4} \rfloor.$$

Logo $k = 160 + 32 + 6 + 1 = 199$.

Opção b).

3. Considere as seguintes afirmações:

i) 5 é inverso multiplicativo de $72 \pmod 7$.

ii) Se $7a \equiv 7b \pmod{12}$ e $b \equiv c \pmod{12}$ então $a^2 - b \equiv c^2 - c \pmod{12}$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Relativamente às afirmações acima temos que:
(Escolha a opção correta)

a) Ambas as afirmações são verdadeiras.

b) A afirmação i) é verdadeira e a afirmação ii) é falsa.

c) A afirmação i) é falsa e a afirmação ii) é verdadeira.

d) Ambas as afirmações são falsas.

Resolução: Como $mdc(72, 7) = 1$ temos que 72 é invertível módulo 7. Contudo, $72 \cdot 5 = 360 \not\equiv 1 \pmod 7$. Logo 5 não é inverso multiplicativo de 72 módulo 7 e portanto a afirmação i) é falsa. [O que se tem é $72 \cdot 4 = 288 \equiv 1 \pmod 7$, ou seja, 4 é inverso multipicativo de 72 módulo 7].

De $7a \equiv 7b \pmod{12}$, e visto $mdc(7, 12) = 1$, temos por cancelamento que $a \equiv b \pmod{12}$. Desta última congruência, e como por hipótese temos que $b \equiv c \pmod{12}$, resulta por transitividade que $a \equiv c \pmod{12}$. Desta última conguência, por compatibilidade com o produto temos que $a^2 \equiv c^2 \pmod{12}$. Desta última congruência, usando uma vez mais a hipótese $b \equiv c \pmod{12}$, concluímos, por compatibilidade com a diferença, que $a^2 - b \equiv c^2 - c \pmod{12}$. A afirmação ii) é verdadeira.

Logo, a opção correta é a opção c).

4. Prove que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se tem que $24n^3+5$ e $18n^3+4$ são primos entre si.

Resolução: Seja $m \in \mathbb{Z}$ um divisor positivo comum de $24n^3+5$ e $18n^3+4$, i.e., $m|24n^3+5$ e $m|18n^3+4$. Então $m|-3(24n^3+5)+4(18n^3+4)$. Logo $m|-72n^3-15+72n^3+16$, i.e., $m|1$. Sendo m divisor positivo, concluímos que $m = 1$.

Provámos desta forma que $mdc(24n^3+5, 18n^3+4) = 1$ e portanto $24n^3+5$ e $18n^3+4$ são primos entre si.

Cotação: 0,5 valores.

5. (a) Recorrendo ao algoritmo de Euclides determine $mdc(1818, 305)$.

Resolução: Calculemos o máximo divisor comum pedido, usando o algoritmo de Euclides. Temos que

$$\begin{array}{rcl} 1818 & = & 305 \times 5 + 293 \\ 305 & = & 293 \times 1 + 12 \\ 293 & = & 12 \times 24 + 5 \\ 12 & = & 5 \times 2 + 2 \\ 5 & = & 2 \times 2 + 1 \\ 2 & = & 1 \times 2 + 0 \end{array}$$

Sabemos que $mdc(1818, 303) = mdc(305, 293) = mdc(293, 12) = mdc(12, 5) = mdc(5, 2) = mdc(2, 1) = 1$.

(b) Encontre uma solução inteira da equação $1818x + 305y = 1$.

Resolução: Partindo da resolução na alínea a), isolemos os restos:

$$\begin{array}{rcl} 293 & = & 1818 - 305 \times 5 \\ 12 & = & 305 - 293 \times 1 \\ 5 & = & 293 - 12 \times 24 \\ 2 & = & 12 - 5 \times 2 \\ 1 & = & 5 - 2 \times 2 \end{array}$$

A última expressão permite expressar 1 como combinação linear de 5 e 2. Façamos sucessivas substituições, segundo as igualdades acima:

$1 = 5 - (12 - 5 \times 2) \times 2 \Leftrightarrow 1 = 5 \times 5 - 12 \times 2$

$1 = (293 - 12 \times 24)5 - 12 \times 2 \Leftrightarrow 1 = 293 \times 5 - 12 \times 122$

$1 = 293 \times 5 - (305 - 293) \times 122 \Leftrightarrow 1 = 293 \times 127 - 305 \times 122$

$1 = (1818 - 305 \times 5)127 - 305 \times 122 \Leftrightarrow 1 = 1818 \times 127 - 305 \times 757$

Logo $(127, -757)$ é uma solução inteira da equação dada.

Cotações: 5(a): 0,3 valores; 5(b): 0,7 valores.

6. Indique, justificando, o número de divisores positivos de 52920 que não são múltiplos de 2.

Resolução:

Fatorizando 52920 em números primos temos $52920 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$. Logo um número natural é um divisor positivo de 52920 se, e somente se, for da forma

$2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\theta$, com $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}, \gamma \in \{0, 1\}, \theta \in \{0, 1, 2\}$.

Como pretendemos contar os divisores positivos de 52920 que não são múltiplos de 2, temos de excluir as potências de 2, ou seja, os divisores pretendidos são da forma $2^0 \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\theta$ com β, γ, θ como acima.

Existem portanto

$$\#\{0\} \times \#\{0,1,2,3\} \times \#\{0,1\} \times \#\{0,1,2\} = 1 \times 4 \times 2 \times 3 = 24$$

divisores nas condições pretendidas.

Resolução alternativa:

Fatorizando 52920 em números primos temos $52920 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$. Logo um número natural é um divisor positivo de 52920 se, e somente se, for da forma

$2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\theta$, com $\alpha \in \{0,1,2,3\}, \beta \in \{0,1,2,3\}, \gamma \in \{0,1\}, \theta \in \{0,1,2\}$.

Assim existem

$$\#\{0,1,2,3\} \times \#\{0,1,2,3\} \times \#\{0,1\} \times \#\{0,1,2\} = 4 \times 4 \times 2 \times 3 = 96$$

divisores positivos de 52920.

A este número devemos subtrair o número de divisores positivos que são múltiplos de 2, ou seja, aqueles cujo expoente em 2 é 1, 2 ou 3. Existem

$$\#\{1,2,3\} \times \#\{0,1,2,3\} \times \#\{0,1\} \times \#\{0,1,2\} = 3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$$

divisores nestas condições.

Concluímos, assim, que o número de divisores nas condições pretendidas, i.e., divisores positivos que não são múltiplos de 2 são: $96 - 72 = 24$.

Cotação: 0,5 valores.

7. Seja $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e tomemos $n = a^{8192} + 1$ e $m = a^{4096} + 1$.

   a) Estude $\frac{n}{m}$ quanto à irredutibilidade[1].

      Resolução: Temos $mdc(n, m) = mdc(a^{8192} + 1, a^{4096} + 1) = mdc(a^{2^{13}} + 1, a^{2^{12}} + 1)$.

      Pelo Exemplo 1.6 do texto de apoio "Divisibilidade" sabemos que

      $$mdc(a^{2^{13}} + 1, a^{2^{12}} + 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ é par} \\ 2 & \text{se } a \text{ é ímpar} \end{cases}$$

      Logo a fração dada é irredutível se a for par e é redutível se a for ímpar.

[1] Sugestão: Note que ou a é par ou a é ímpar.

b) Determine o $mmc(n, m)$ em função de a.
Resolução: Sabemos que

$$mdc(n, m) \cdot mmc(n, m) = n \cdot m$$

e, portanto,

$$mmc(n, m) = \frac{n \cdot m}{mdc(n, m)}.$$

Assim, se a é par, temos $mmc(n, m) = (a^{8192} + 1)(a^{4096} + 1)$.
Se a é ímpar, temos $mmc(n, m) = \frac{(a^{8192}+1)(a^{4096}+1)}{2}$.

Cotação: 7(a): 0,3 valores; 7(b): 0,3 valores.

8. Mostre que n ser primo é condição necessária mas não suficiente para $2^n - 1$ ser primo[2].

Resolução: Comecemos por provar que "n ser primo" é condição necessária para "$2^n - 1$ ser primo", isto é, $2^n - 1$ primo $\Rightarrow n$ primo.

Suponhamos com vista a absurdo que $2^n - 1$ é primo mas n não é primo. Como n não é primo existem naturais $r, s > 1$ tais que $n = rs$. Note que sendo $2^n - 1$ primo se tem que $n > 1$. Mas então $2^n - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1) \sum_{i=0}^{s-1} 2^{ri}$. Como $r > 1$ temos que $2^r - 1 > 1$ e como $s > 1$ temos que $s - 1 > 0$, logo $\sum_{i=0}^{s-1} 2^{ri} = 2^0 + 2^r + \ldots + 2^{r(s-1)} > 1$. Absurdo pois $2^n - 1$ é primo. Provámos assim que se $2^n - 1$ é primo então n é primo.

Para mostrarmos que n ser primo não é condição suficiente para $2^n - 1$ ser primo, isto é n primo $\not\Rightarrow 2^n - 1$ primo, basta apresentarmos um contraexemplo em que n seja primo e $2^n - 1$ não seja primo. Seja $n = 11$. Temos que n é primo mas $2^n - 1 = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ não é primo.

Cotação: 0,5 valores (ser condição necessária 0,25; não ser condição suficiente 0,25).

FIM

[2]Sugestão: Na prova de "condição necessária" pode recorrer à igualdade $2^{rs} - 1 = (2^r - 1) \sum_{i=0}^{s-1} 2^{ri}, \quad r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para mostrar que "não é condição suficiente" basta apresentar um contraexemplo.