E-fólio B

ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve resolução

Grupo I.

1. **d)**
2. **c)**
3. **c)**
4. **d)**

Grupo II. A afirmação é verdadeira.

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 0$ e λ não é valor próprio de A. Então as matrizes $A - \lambda I_n$ e λI_n são invertíveis, e tem-se

$$A = (A - \lambda I_n) + (\lambda I_n).$$

Grupo III. i) Para verificar que F é um subespaço do espaço das matrizes de ordem 3, é necessário ver que F satisfaz as 4 propriedades do Critério de Subespaço Vetorial. A primeira propriedade é imediata; a matriz nula é hemi-simétrica; usando as propriedades da transposta $(A+B)^T = A^T + B^T$ e $(kA)^T = k(A^T)$ logo, se A e B são hemi-simétricas, $-(A+B)^T = -(A^T + B^T) = (-A^T) + (-B^T) = A + B$ e $-(kA)^T = -k(A^T) = k(-A^T) = kA$.

ii) Para calcular a dimensão de F vamos começar por caracterizar as matrizes hemi-simétricas. Sendo $A = (a_{ij})$, tem-se $a_{ij} = -(a_{ji})$, e portanto para $i = j$ tem-se $a_{ii} = 0$, e para os restantes elementos de A obtemos $a_{21} = -a_{12}, a_{31} = -a_{13}$ e $a_{32} = -a_{23}$. Assim,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$:= a_{12}A_1 + a_{13}A_2 + a_{23}A_3.$$

Por construção, as matrizes $A_i, (i = 1,2,3)$ geram F e portanto temos que $\dim F \leqslant 3$. Para ver que a dimensão de F é igual a 3, basta ver que as 3 matrizes A_1 A_2 e A_3 são linearmente independentes. Facilmente se vê que a única combinação linear nula é aquela que se obtém com os coeficientes todos nulos $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = \mathbf{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$. Assim as matrizes $A_i, (i = 1,2,3)$ são linearmente independentes e geram F, logo F tem dimensão 3.

iii) Pelo que vimos na alínea anterior (A_1, A_2, A_3) é uma sequência geradora de F composta por vetores linearmente independentes, logo é uma base de F.

iv) Para obter a matriz B que representa T em relação à base anterior e à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é necessário calcular $T(A_i), (i = 1,2,3)$. Tem-se $T(A_1) = (1,0,0), T(A_2) = (1,1,0)$ e $T(A_3) = (0,1,1)$ e portanto a matriz que representa T é $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

v) É imediato ver que $\det B = 1 \neq 0$ e portanto T é invertível, e como tal é injetiva, tendo-se Nuc $T = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula. Também podíamos resolver a equação $T(A) = (0,0,0)$ e obter imediatamente $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, e portanto $A = \mathbf{0}$.

vi) Uma aplicação linear transforma geradores de F em geradores de Im T, proposição 5.16 (5ª edição). Já vimos que a matriz B tem determinante diferente de 0, e portanto característica igual a 3. Como as colunas da matriz B são exatamente os geradores de Im T, concluímos que Im T tem dimensão 3, e portanto Im $T = \mathbb{R}^3$. Logo, T é sobrejetiva.

vii) Pelo que vimos anteriormente $3 = 0 + 3$, ou seja T satisfaz o teorema da Dimensão.

Grupo IV. i) Calculando a imagem dos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$, obtemos

$$f(1,0,0) = (0,1,1), \quad f(0,1,0) = (1,1,2) \quad \text{e} \quad f(0,0,1) = (-1,0,-1),$$

e portanto $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

ii) Uma vez que temos 3 vetores num espaço de dimensão 3, basta ver que são linearmente independentes. Colocando os 3 vetores num matriz facilmente se vê que a matriz tem característica 3 e portanto os 3 vetores são linearmente independentes.

Para calcular a matriz de mudança de base vamos de escrever os vetores da 1ª base à custa dos vetores da 2ª base, ou seja

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= a_1(1,-1,-1) + a_2(0,1,1) + a_3(0,0,1) = 1(1,-1,-1) + 1(0,1,1) + 0(0,0,1), \\
(0,1,0) &= b_1(1,-1,-1) + b_2(0,1,1) + b_3(0,0,1) = 0(1,-1,-1) + 1(0,1,1) - 1(0,0,1), \\
(0,0,1) &= c_1(1,-1,-1) + c_2(0,1,1) + c_3(0,0,1) = 0(1,-1,-1) + 0(0,1,1) + 1(0,0,1),
\end{aligned}$$

e portanto $M_{(\text{b.c.}\mathbb{R}^3, \mathscr{B}_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

iii) O polinómio característico de A é $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$, e portanto os valores próprios de A são $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$.

iv) Os espaços próprios associados aos valores próprios $-1, 0$ e 1, respetivamente são gerados por $v_1 = (2,-1,1), v_2 = (-1,1,1)$ e $v_3 = (0,1,1)$.

Grupo V. i) Seja λ um valor próprio não nulo de AB, e u um valor próprio associado a λ. Então

$$ABu = \lambda u \implies BABu = B(\lambda u) = \lambda(Bu) \implies BA(Bu) = \lambda(Bu),$$

e portanto λ é valor próprio de BA com valor próprio associado Bu, pois $Bu \neq 0$ (porquê?). De modo análogo, se λ for um valor próprio não nulo de BA então também é um valor próprio AB.

ii) Suponhamos que C não é invertível. Então $\lambda = 0$ é um valor próprio de C, ou seja $\det C = 0$. Mas como $\det C = \det AB = \det A \det B = \det B \det A = \det BA = \det D$, também D não é invertível. Trocando os papéis de C e de D concluímos que C não é invertível se e só se D não é invertível. Mas isso é equivalente a dizer que C é invertível se e só se D é invertível.

FIM