

”

E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio**UNIDADE CURRICULAR:** Álgebra Linear I**CÓDIGO:** 21002**DOCENTE:** Adelino Paiva**A preencher pelo estudante****NOME:** Andreia Teixeira Alves**N.º DE ESTUDANTE:** 2300610**CURSO:** Licenciatura de Engenharia Informática**DATA DE ENTREGA:** 08/12/2025

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

1.1 e 1.2 abaixo

Andreia Alves nº 2300610

1.1. No trabalho apresentado, começamos com a matriz aumentada $[A | I_3]$ e seguem-se operações elementares nas linhas. Este é o método utilizado para calcular a inversa de uma matriz. Com as operações a $[A | I_3]$ pretende-se transformar a matriz A na matriz de identidade I_3 . Assim a parte direita da matriz aumentada fica igual à matriz inversa de A .
concluindo, o que se pretende determinar é a matriz inversa de A .

1.2. Para perceber a partir de que etapa a Resolução está errada, fui verificar cada operação de linhas entre as etapas.

Da etapa (a) para a (b) faz-se apenas a troca $L_2 \leftrightarrow L_1$, que está certa. Na etapa (b) para a (c), aplicam-se $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$. Calculando essas operações, o resultado é igual as linhas em (c), Logo esta parte está certa.

Mas podemos perceber que o erro surge de (c) para (d). Nesta parte aplicam-se:

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Em (c) temos:

$$L_2 = (0, 1, 5 | 1, 2, 0), \quad L_3 = (0, 1, 6 | 0, -3, 1)$$

$$\text{Logo } L_3 - L_2 = (0, 0, 1 | -1, -5, 1).$$

O elemento da quinta coluna na deveria ser -5 e não -1.

A resolução começa a estar errada na etapa (d).

1.3

1.3. Andrei Alves nº2300610
ERRO está de (c) para (d).

(c) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right] \quad \text{Aplicando } L_3 \leftarrow L_3 - L_2 :$$

(d) corrigida:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

Para obter a matriz de identidade.

$$(c) \rightarrow L_2 = (0, 1, 5 | 1, 2, 0)$$

$$L_3 = (0, 1, 6 | 0, -3, 1)$$

$$\text{Logo: } L_3 - L_2 = (0 - 0, 1 - 1, 6 - 5 | 0 - 1, -3 - 2, 1 - 0) = \\ = (0, 0, 1 | -1, -5, 1)$$

Então a (d) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

Agora temos de anular os elementos acima do 1 que está em L_1 e o 5 que está em L_2 :

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$$

Para $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$:

$$L_1 = (1, 0, 1 | 0, 1, 0)$$

$$L_3 = (0, 0, 1 | -1, -5, 1)$$

$$\text{Assim: } L_1 - L_3 = (1 - 0, 0 - 0, 1 - 1 | 0 - (-1), 1 - (-5), 0 - 1) = \\ = (1, 0, 0 | 1, 6, -1)$$

1.3 continuação

Para $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$:

$$L_2 = (0, 1, 5 | 1, 2, 0)$$

$$L_3 = (0, 0, 1 | -1, -5, 1)$$

Logo:

$$L_2 - 5L_3 = (0 - 5 \cdot 0, 1 - 5 \cdot 0, 5 - 5 \cdot 1 | 1 - 5 \cdot (-1), 2 - 5 \cdot (-5), 0 - 5 \cdot 1) =$$

$$= (0, 1, 0 | 1 + 5, 2 + 25, 0 - 5) =$$

$$= (0, 1, 0 | 6, 27, -5)$$

Assim obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 27 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array} \right] = [I_3 | B]$$

Pela bibliografia, quando passamos $[A | I_3]$ em $[I_3 | B]$ por operações elementares nas linhas, a matriz resultante B é a inversa de A .

Logo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 27 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1

André Alves nº 2300610

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere o seguinte sistema de equações lineares em incógnitas x, y, z :

$$-x + y - z = -3$$

$$\alpha x + \alpha y = \beta$$

$$\alpha y - z = -4$$

Discuta o sistema em função de α e β , estudando a existência e o número de soluções para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Indique em cada um se o sistema é impossível, possível determinado ou possível indeterminado e, quando for possível, determine as soluções.

2.2

2.2. Andreia Alves nº 2300610

A partir da resolução parcial, obtemos a seguinte matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \alpha & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & \beta-3\alpha+8 \end{array} \right]$$

A matriz já está em forma escalonada e permite fazer a discussão do sistema em função de α e β .
Tal como na bibliografia, analisamos separadamente os valores para os quais um coeficiente pivô é zero.

Caso 1: $\alpha = 2$

Substituindo $\alpha = 2$ na última linha de 1:

$$0 \ 0 \ 0 \ | \ \beta - 6 + 8 = \beta + 2$$

Corresponde a:

$$0 = \beta + 2$$

Subcaso 1.1: $\beta \neq -2$

A terceira equação fica contraditória.

Segundo a bibliografia "uma linha da forma $0 \ 0 \ 0 \ | \ c$, com $c \neq 0$, implica um sistema impossível", logo neste caso o sistema é impossível.

Subcaso 1.2.

A terceira equação reduz-se a $0 = 0$, não dá informação nova. Ficamos assim com:

$$\begin{cases} -x + y - z = -3 \\ 2y - z = -4 \end{cases}$$

Escolhemos $z = t$, com $t \in \mathbb{R}$

$$2^{\text{a}} \text{ equação: } 2y - t = -4 \rightarrow y = \frac{t-4}{2}$$

$$1^{\text{a}} \text{ equação: } -x + \frac{t-4}{2} - t = -3$$

$$-x = -3 - \frac{t-4}{2} + t$$

$$x = 3 + \frac{t-4}{2} - t = 1 - \frac{t}{2}$$

2.2. Continuação ①

Logo, para $\alpha = 2$ e $\beta = -2$, o sistema é:
possível indeterminado

$$(x, y, z) = \left(1 - \frac{t}{2}, \frac{t}{2} - 2, t\right), t \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\alpha \neq 2$

Da terceira linha de 1 temos:

$$(2 - \alpha)z = \beta - 3\alpha + 8$$

Como $2 - \alpha \neq 0$, podemos resolver:

$$z = \frac{\beta - 3\alpha + 8}{2 - \alpha}$$

Ao vermos a segunda linha:

$$\alpha y - 2 = -4$$

Subcaso 2.1: $\alpha = 0$

Tracando $\alpha = 0$ no sistema inicial:

$$\begin{cases} -x + y - 2 = -3 \\ 0 = \beta \\ -2 = -4 \end{cases}$$

Se $\beta \neq 0$, temos $0 = \beta \rightarrow$ sistema impossível

Se $\beta = 0$:

Da terceira equação $z = 4$

Da primeira:

$$-x + y - 4 = -3 \rightarrow y = x + 1$$

Assumindo $x = t \in \mathbb{R}$: $(x, y, z) = (t, t + 1, 4)$.

$\hookrightarrow$ Possível indeterminado

2.2 Continuação ②

Subcaso 2.2: $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$

Podemos usar 2 e 3

$$\alpha y - 2 = -4:$$

$$\alpha y = -4 + 2 \rightarrow y = \frac{-4 + 2}{\alpha}$$

Substituindo:

$$y = \frac{-4 + \frac{\beta - 3\alpha + 8}{2 - \alpha}}{\alpha} = y = \frac{-\alpha - \beta}{\alpha(\alpha - 2)}$$

Da primeira equação $-x + y - 2 = -3$:

$$x = 3 + y - 2$$

Substituindo y e z :

$$x = \frac{\alpha\beta + \alpha - \beta}{\alpha(\alpha - 2)}$$

Concluindo, quando $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$, o sistema só tem uma solução:

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha\beta + \alpha - \beta}{\alpha(\alpha - 2)} \\ y = \frac{-\alpha - \beta}{\alpha(\alpha - 2)} \\ z = \frac{\beta - 3\alpha + 8}{2 - \alpha} \end{cases} \quad \text{Possível determinado}$$

Logo: $\alpha = 2$:

$\beta \neq -2 \rightarrow$ impossível

$\beta = -2 \rightarrow$ possível indeterminado

$\alpha = 0$:

$\beta \neq 0 \rightarrow$ impossível

$\beta = 0 \rightarrow$ possível indeterminado

$\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2 \rightarrow$ possível determinado

3.1

3.1. Andreia Alves n.º 2300610
O que é apresentado é o desenvolvimento de Laplace pela primeira linha como falado na bibliografia, quando definem o determinante de ordem n .
O que está a ser calculado é o determinante da matriz quadrada de ordem 4.

3.2

3.2. Se usarmos Laplace temos:

$$\det(A) = 5(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0(\dots)$$

Colocando os menores como determinantes:

$$\det(A) = 5(-1)^2 \det(B) + 6(-1)^3 \det(C), \text{ onde}$$

$$B = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Como $(-1)^2 = 1$ e $(-1)^3 = -1$, ficamos com:

$$\det(A) = 5 \det(B) - 6 \det(C).$$

Calcular de $\det(B)$

Usamos Laplace:

$$\det(B) = 5(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0(\dots)$$

Calculamos os determinantes de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 1 = 25 - 6 = 19$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 6 \cdot 0 = 5$$

$$\begin{aligned} \text{Então } \det(B) &= 5 \cdot 19 - 6 \cdot 5 \\ &= 95 - 30 = 65 \end{aligned}$$

3.2. continuação

calcular $\det(C)$.

É mais simples ir pela primeira coluna, pois só o primeiro elemento é diferente de zero:

$$\det(C) = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0(\dots) + 0(\dots) =$$
$$= \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

$$\text{Então } \det(C) = 1 \cdot 19 = 19$$

concluindo, determinante de A:

Substituindo no $\det(A) = 5 \det(B) - 6 \det(C)$:

$$\det(A) = 5 \cdot 65 - 6 \cdot 19 = 325 - 114 = 211$$

$$\text{Logo } \det(A) = 211 //$$

4.1

4.1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

utilize o método de Cramer para determinar as soluções do sistema.

Apresente todos os determinantes necessários e justifique cada passo.

4.2

4.2. usando método de cramer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ o determinante principal é: } D = \det(A)$$

Trabalhamos a primeira linha:

$$D = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculamos os determinantes de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5$$

Substituindo:

$$D = 1(-1) - 2(-4) + 3(-5) = -1 + 8 - 15 = -8$$

Como $D \neq 0$, o sistema é possível determinado.

Matriz Dx :

$$Dx = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Na primeira coluna:

$$Dx = 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

4.2 continuação 1

Determinantes de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

Substituindo:

$$Dx = 4(-1) - 4(-4) + 4(-5)$$

$$Dx = -4 + 16 - 20 = -8$$

Matriz Dy : $Dy = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Desenvolvemos pela

segunda coluna:

$$Dy = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

os determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 1 - 9 = -8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$$

Substituindo:

$$Dy = -4(-7) + 4(-8) - 4(-4) = 28 - 32 + 16 = 12$$

4.2 continuação 2

Matriz Dz : $Dz = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Desenvolvendo pela

terceira coluna:

$$Dz = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Determinantes de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

Substituindo: $Dz = 4(-5) - 4(-7) + 4(-1)$

$$(-1) = -20 + 28 - 4 = 4$$

Aplicando cramer:

$$x = \frac{Dx}{D} \quad y = \frac{Dy}{D} \quad z = \frac{Dz}{D}$$

$$x = \frac{-8}{-8} = 1 \quad y = \frac{12}{-8} = -\frac{3}{2} \quad z = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$$= (x, y, z) = \left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

A solução é única, possível determinado

5.1

5.1. Segundo a bibliografia, o vetor $b = (1, 3, 6)$ é combinação linear de $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(3, 2, 1)$. Se existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$b = \lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(2, 3, 4) + \lambda_3(3, 2, 1).$$

Equivaler a:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 3 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

que é a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 3 \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A última linha corresponde a: $0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 = 1$ ou seja, $0 = 1$. Segundo a bibliografia, um sistema com uma linha da forma $0 \ 0 \ 0 \ c$ com $c \neq 0$ é impossível. Logo não existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que verifiquem a igualdade.

Logo $b = (1, 3, 6)$ não é combinação linear de $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(3, 2, 1)$, principalmente de $b \notin U$.

5.2

5.2. Base $U: U = \{u_1, u_2, u_3\}$

verificamos se u_3 é combinação linear de u_1 e u_2 :

$$u_3 = au_1 + bu_2 \Rightarrow (3, 2, 1) = a(1, 2, 3) + b(2, 3, 4)$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + 3b = 2 \\ 3a + 4b = 1 \end{cases}$$

Nas duas primeiras:

$$1^a: a = 3 - 2b$$

substituindo na 2ª:

$$2(3 - 2b) + 3b = 2 \Rightarrow 6 - 4b + 3b = 2 \Rightarrow 6 - b = 2 \Rightarrow b = 4$$

Então $a = 3 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = -5$

Na 3ª: $3a + 4b = 3(-5) + 4 \cdot 4 = -15 + 16 = 1$

Logo $u_3 = -5u_1 + 4u_2$

Como u_1 e u_2 não são múltiplos um do outro, são independentes. Logo: $\{u_1, u_2\}$ é uma base de U

Já sabemos que $b \notin U$. Então temos o conjunto $\{u_1, u_2, b\}$ para ser uma base de $\mathbb{R}^3$, vamos considerar:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Se $\det(M) \neq 0$, então as colunas são linearmente independentes e forma uma base de $\mathbb{R}^3$

Calculando o determinante de M pela primeira linha:

$$\det(M) = 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Determinantes de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 18 - 12 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 12 - 9 = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$$

Logo, $\det(M) = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 6 - 6 - 1 = -1 \neq 0$

O determinante é não nulo, as colunas de M são linearmente independentes, então:

$\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (1, 3, 6)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém a base $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$ de U .

5.3

5.3. Para calcular $U \cap V$, tivemos em conta um vetor genérico de U .

Já tínhamos visto que:

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad u_1 = (1, 2, 3), \quad u_2 = (2, 3, 4)$$

Logo assim, qualquer vetor de U pode escrever-se como:

$$w = \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta, 3\alpha + 4\beta)$$

Para $w \in V$, tem de se satisfazer a condição:

$$2x + 3y + 9z = 0$$

Substituindo x, y, z em função de α, β :

$$2(\alpha + 2\beta) + 3(2\alpha + 3\beta) + 9(3\alpha + 4\beta) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{calculo: } (2+6+27)\alpha + (4+9+36)\beta &= 0 \\ &= 35\alpha + 49\beta = 0 \end{aligned}$$

A dividir por 7:

$$5\alpha + 7\beta = 0$$

Então os pares (α, β) que satisfazem esta equação estão numa reta do $\mathbb{R}^2$ e portanto $U \cap V$ é um subespaço unidimensional.

$$\beta = -\frac{5}{7}\alpha$$

Assim, seja $t = \alpha$ então todos os vetores de $U \cap V$ podem ser escritos como:

$$w(t) = t(1, 2, 3) - \frac{5t}{7}(2, 3, 4) = \frac{t}{7}(-3, -1, 1)$$

Logo, todos os vetores da interseção são múltiplos de $(-3, -1, 1)$.

Por exemplo, tomando $(\alpha, \beta) = (7, -5)$ obtemos:

$$\begin{aligned} w_0 &= 7u_1 - 5u_2 = (7, 14, 21) - (10, 15, 20) = \\ &= (-3, -1, 1). \end{aligned}$$

verificamos que pertence a V :

$$2(-3) + 3(-1) + 9(1) = -6 - 3 + 9 = 0$$

E pertence a U porque foi obtido como combinação linear de u_1 e u_2 .

$$\text{Então: } U \cap V = \langle (-3, -1, 1) \rangle$$

5.4

5.4 Base de U : $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$,
pelo que $\dim U = 2$

Temos ainda $U \cap V = \langle (-3, -1, 1) \rangle$

Logo: $\dim(U \cap V) = 1$

O subespaço: $V = \{(x, y, z) : 2x + 3y + 9z = 0\}$

É o conjunto das soluções de uma equação linear em $\mathbb{R}^3$, logo tem dimensão 2.

Portanto: $\dim V = 2$

segundo a fórmula de dimensão da soma de subespaços:

$$\begin{aligned} \dim(U+V) &= \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = \\ &= 2 + 2 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Como $U+V$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 3, concluímos que $U+V = \mathbb{R}^3$