## I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

### Questão 1

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$. Então:

- ☐ **a)** $AB$ é invertível.
- ☒ **b)** $BA$ é invertível.
- ☐ **c)** $AB = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.
- ☐ **d)** $BA = [9]$.

### Questão 2

Considere os subespaços de $\mathbb{R}^2$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x\} \text{ e } G = \langle (1, 0); (1, -1) \rangle .$$

Considere as afirmações seguintes:

1. $\dim F = 2$.
2. $\dim F = 1$.
3. $\dim G = 2$.

Então:

- ☐ **a)** Nenhuma das afirmações é verdadeira.
- ☐ **b)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.
- ☒ **c)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.
- ☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

### Questão 3

Sejam $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$, e $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Então:

- ☐ **a)** 1 não é valor próprio de $A$.
- ☒ **b)** $A$ é diagonalizável.
- ☐ **c)** $A$ é invertível..
- ☐ **d)** $\det A = 3$ .

## Questão 4

Considere as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, definidas por

$$A = \begin{bmatrix} u & v & w \\ v & x & y \\ w & y & z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} u & v & w \\ v & x & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suponha que $\det A = 3$, e considere as afirmações:

1. $\det(A + B) = 12$.
2. $\det(A^\top + B) = 3$.
3. $\det(A - 2B) = 3$.
4. $\det(3A^{-1}) = 9$.

Então:

- ☐ **a)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.
- ☐ **b)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.
- ☒ **c)** Apenas três das afirmações são verdadeiras.
- ☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

## Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

| |
|---|
| Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter. |

**II.** Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

**a)** Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ então o produto $A^k$ está definido para qualquer $k \in \mathbb{N}$ se e sómente se $m = n$.

**b)** Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $A^2 = 0$ então $A = 0$.

**III.** Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + 5z = 3 \\ 2x + 5y + 5z = 3 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

**IV.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

**a)** Determine os valores próprios de $A$.

**b)** Será a matriz $A$ diagonalizável? Justifique a sua resposta.

**c)** Determine os vetores próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea a).

**d)** Determine se é possível escrever $A$ na forma $A = PDP^{-1}$, onde $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine matrizes $P$ e $D$ nessas condições.

**V.** Considere a função $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, a-d, b-c, d-c).$$

**a)** Mostre que $T$ é linear.

**b)** Determine uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e uma base de $\mathbb{R}^4$.

**c)** Calcule a representação matricial de $T$ em relação às bases indicadas na alínea anterior.

**d)** Determine o núcleo de $T$ e indique uma base para o núcleo de $T$.

**e)** Determine a dimensão da imagem de $T$.

**f)** Indique se existem matrizes $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $T(M) = (1,1,1,1)$.

**VI.** Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é uma sequência linearmente independente.

ii) $(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v})$ é uma sequência linearmente independente.

FIM

## RESOLUÇÃO

Nas questões de escolha múltipla não era necessário a apresentação dos cálculos e justificações que se seguem, mas apenas a indicação da alínea correspondente à resposta correta. Em praticamente todas as alíneas há várias maneiras corretas de resolver a questão colocada e a que aqui se apresenta é apenas uma delas, e não necessariamente a mais curta.

**I. 1.** Efetuando o produto das duas matrizes dadas tem-se $AB = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{smallmatrix}\right]$ e $BA = [\,11\,]$. Portanto a resposta correta é a alínea b).

**2.** O conjunto $F$ é um espaço linear gerado pelo vetor $(1,1)$ e tem dimensão 1; o conjunto $G$ é gerado por dois vetores linearmente independentes e portanto tem dimensão 2. Assim, a resposta correta é a da alínea c).

**3.** Uma vez que os vetores $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ são linearmente independentes, são em particular não nulos, e podemos concluir que um dos valores próprios é igual a zero e o outro igual a 1, com multiplicidade algébrica 2. Estes são os únicos vetores próprios pois uma matriz $3 \times 3$ tem no máximo 3 valores próprios. O facto de os vetores $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ serem linearmente independentes também nos permite concluir que o valor próprio 1 tem um espaço próprio associado com dimensão 2. Portanto a matriz $A$ é uma matriz $3 \times 3$ com 3 vetores próprios linearmente independentes logo é diagonalizável. Assim a resposta correta é a b).

**4.** Para esta alínea convinha ter presente as proposições 3.17 e 3.19 (3ª edição). Sendo $(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3})$ as linhas da matriz $A$, tem-se $\det A = \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3})$, e

$$\begin{aligned}
\det(A + B) &= \det(\boldsymbol{\ell_1} + \boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2} + \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) \\
&= \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2} + \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) + \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2} + \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) \\
&= \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) + \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) + \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) + \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) \\
&= 4 \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) \\
&= 4 \det A \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Como a matriz $A$ é simétrica tem-se $A^\top = A$ e portanto $\det(A^\top + B) = \det(A + B) = 12$, como vimos na alínea anterior. Para a alínea **3.)** tem-se

$$\begin{aligned}
\det(A - 2B) &= \det(-\boldsymbol{\ell_1}, -\boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) \\
&= -\det(\boldsymbol{\ell_1}, -\boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) \\
&= -\left[-\det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3})\right] \\
&= \det(\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}) \\
&= \det A \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Para a alínea **4.)** tem-se

$$\det 3A^{-1} = 3^3 \det A^{-1} = 3^3 (\det A)^{-1} = 3^3\, 3^{-1} = 3^2 = 9.$$

Assim a resposta correta é a c).

**II. a)** O produto $A \times A$ só está bem definido se $m = n$, ou seja para $k = 2$ tem-se que $A^k$ está bem definido se e só $m = n$. Por indução prova-se para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

**b)** O único caso em que $A^2 = 0$ implica $A = 0$ é quando $A$ é um escalar, ou seja quando $n = 1$. Para $n \neq 1$ podemos considerar uma matriz em que todas as entradas são nulas, com exceção do último elemento da 1ª linha, igual a 1 por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é não nula e o seu quadrado é a matriz nula. Portanto a afirmação é falsa para $n \geqslant 2$.

**III.** Antes de utilizarmos o *método de eliminação de Gauss* para estudar o sistema

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x+y+5z=3 \\ 2x+5y+5z=3 \end{cases}$$

vamos escrevê-lo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right],$$

e portanto com a notação habitual,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2-3\ell_1 \\ \ell_3-2\ell_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}\ell_2 \\ \ell_3-3\ell_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2+\ell_3 \\ -2\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_1-\ell_2 \\ \ell_1-2\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

donde concluímos que existe solução, que ela é única e que a solução do sistema é dada por $(x, y, z) = (4, 1, -2)$.

**IV. a)** Temos

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

e usando a 1ª coluna de $A - \lambda I_3$ para calcular $\det(A - \lambda I_3)$ vem

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_3) &= (4-\lambda)\det\left[\begin{smallmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{smallmatrix}\right] = (4-\lambda)[(2-\lambda)(-1-\lambda)+2] \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Os valores próprios de $A$ são as raízes do polinómio característico $p_A(\lambda) = \lambda(4-\lambda)(\lambda-1)$, e portanto $A$ tem três valores próprios distintos, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 4$.

**b)** Uma vez que $A$ é uma matriz de ordem 3 com 3 valores próprios distintos, a matriz $A$ é diagonalizável.

**c)** Tem-se

$$A-\lambda_1 I_3 = \begin{bmatrix} 4-\lambda_1 & 1 & -5 \\ 0 & 2-\lambda_1 & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-0 & 1 & -5 \\ 0 & 2-0 & -2 \\ 0 & 1 & -1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e portanto o vetor próprio $\mathbf{v_1}$, associado a $\lambda_1$ é uma (qualquer) solução (não nula) do sistema

$$\begin{cases} 4x + y - 5z &= 0 \\ 2y - 2z &= 0 \\ y - z &= 0. \end{cases}$$

As 2 últimas equações permitem concluir que $y = z$ e substituindo na 1ª equação obtemos $x = y = z$, pelo que podemos escolher $\mathbf{v_1} = (1, 1, 1)$.

Para $\lambda_2$ tem-se

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{bmatrix} 4-\lambda_2 & 1 & -5 \\ 0 & 2-\lambda_2 & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1 & 1 & -5 \\ 0 & 2-1 & -2 \\ 0 & 1 & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

e portanto o vetor próprio $\mathbf{v_2}$, associado a $\lambda_2$ é uma (qualquer) solução (não nula) do sistema

$$\begin{cases} 3x + y - 5z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ y - 2z &= 0. \end{cases}$$

As 2 últimas equações permitem concluir que $y = 2z$ e substituindo na 1ª equação obtemos $x = z$, pelo que podemos escolher $\mathbf{v_2} = (1, 2, 1)$.

Para $\lambda_3$ tem-se

$$A - \lambda_3 I_3 = \begin{bmatrix} 4-\lambda_3 & 1 & -5 \\ 0 & 2-\lambda_3 & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-4 & 1 & -5 \\ 0 & 2-4 & -2 \\ 0 & 1 & -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

e portanto o vetor próprio $\mathbf{v_3}$, associado a $\lambda_3$ é uma (qualquer) solução (não nula) do sistema

$$\begin{cases} y - 5z &= 0 \\ -2y - 2z &= 0 \\ y - 5z &= 0. \end{cases}$$

As 2 últimas equações permitem concluir que $y = 0 = z$ e $x$ pode tomar qualquer valor, por exemplo $x = 1$, e portanto podemos escolher $\mathbf{v_3} = (1, 0, 0)$.

**d)** Já vimos na alínea b) que $A$ é diagonalizável, e portanto é possível escrever $A$ na forma $A = PDP^{-1}$, onde $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonal. As matrizes $P$ e $D$ nessas condições são obtidas considerando para $P$ a matriz cujas colunas são os vetores próprios e para $D$ a matriz cuja diagonal são os valores próprios (pela mesma ordem que foi usada para $P$), ou seja

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

**V. a)** Sejam $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} e & f \\ g & h \end{smallmatrix}\right]$, onde $a, b, c, d, e, f, g$ e $h$ são constantes reais arbitrárias. Então $A + B = \left[\begin{smallmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{smallmatrix}\right]$, e portanto temos

$$\begin{aligned} T(A+B) &= (a+e, a+e-(d+h), b+f-(c+g), d+h-(c+g)) \\ &= (a, a-d, b-c, d-c) + (e, e-h, f-g, h-g) \\ &= T(A) + T(B), \end{aligned}$$

e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda A) &= (\lambda a, \lambda a - \lambda d, \lambda b - \lambda c, \lambda d - \lambda c) \\ &= (\lambda a, \lambda(a-d), \lambda(b-c), \lambda(d-c)) \\ &= \lambda(a, a-d, b-c, d-c) \\ &= \lambda T(A). \end{aligned}$$

Concluimos que $T$ é uma transformação linear entre o espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais $2 \times 2$ e o espaço $\mathbb{R}^4$.

**b)** Vamos considerar em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a base canónica (b.c.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e em $\mathbb{R}^4$ também vamos considerar a base canónica (b.c.)

$$(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1).$$

**c)** Para calcularmos a representação matricial de $T$, basta calcular a imagem dos vetores da base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que escolhemos e escrever essa imagem na base de $\mathbb{R}^4$ que escolhemos na alínea anterior. Temos

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como escolhemos a b.c. no espaço de chegada $\mathbb{R}^4$, as imagens que obtivemos são exatamente o que pretendemos, e portanto a matriz $\mathcal{M}$ que representa $T$ em relação às bases indicadas na alínea anterior é

$$\mathcal{M}_{(T;\text{b.c.}_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^4})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**d)** Para calcularmos o núcleo de $T$ temos de resolver a equação $T(A) = (a, a - d, b - c, d - c) = 0\,(= (0, 0, 0, 0))$. Facilmente concluimos que a única solução é $a = b = c = d = 0$ e portanto o núcleo reduz-se à matriz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Também era possível chegar a esta conclusão mostrando que $\det T \neq 0$.

**e)** O *Teorema da Dimensão* (Proposição 5.18, 3ªedição) garante que

$$\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4 = \dim \operatorname{Nuc} T + \dim \operatorname{Im} T = 0 + \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T.$$

**f)** Uma vez que $\dim \operatorname{Im} T = 4$ sabemos que $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^4$, e portanto a equação $T(M) = (1,1,1,1)$ tem necessáriamente solução. Como o núcleo se reduz à matriz nula, $T$ é injetiva e portanto essa solução é única. Resolvendo a equação

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (1,1,1,1) &\Rightarrow (a, a-d, b-c, d-c) = (1,1,1,1) \\ &\Rightarrow a = 1,\ d = 0,\ c = -1 \text{ e } b = 0, \end{aligned}$$

ou seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Também era possível (mas bastante mais trabalhoso) chegar a esta conclusão calculando $T^{-1}(1,1,1,1)$.

**VI.**

Vamos começar por provar que $i) \Rightarrow ii)$.

Para mostrarmos que $(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v})$ é uma sequência linearmente independente temos de provar que dada uma combinação linear nula de $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ então os coeficientes dessa combinação linear são necessariamente nulos. Seja então uma combinação linear nula de $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ com coeficientes $\alpha$ e $\beta$,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{0} &\Rightarrow (\alpha+\beta)\mathbf{u} + (\alpha-\beta)\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow (\alpha+\beta) = 0 = (\alpha-\beta) \\ &\quad \text{(pois } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ são linearmente independentes)} \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0, \end{aligned}$$

e portanto $(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v})$ é uma sequência linearmente independente.

Provemos agora que $ii) \Rightarrow i)$

Para mostrarmos que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes temos de provar que dada uma combinação linear nula de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ então os coeficientes dessa combinação linear são necessariamente nulos. Seja então uma combinação linear nula de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ com coeficientes $\gamma$ e $\delta$,

$$\begin{aligned} \gamma\mathbf{u} + \delta\mathbf{v} = \mathbf{0} &\Rightarrow \frac{\gamma+\delta}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \frac{\gamma-\delta}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \frac{\gamma+\delta}{2} = 0 = \frac{\gamma-\delta}{2} \\ &\quad \text{(pois } (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \text{ e } (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \text{ são linearmente independentes)} \\ &\Rightarrow \gamma = \delta = 0, \end{aligned}$$

e portanto $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é uma sequência linearmente independente.