$\boxed{21082}$ - Actividade Formativa 3

I - Escolha múltipla

Em cada questão apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

1. Sejam $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ duas sucessões definidas pelo sistema $\begin{cases} a_n = b_{n-1} - 2a_{n-1} \\ b_n = 3b_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$, $n \geq 1$.
Sabendo que $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, então:

☐ **a)** $b_{n+1} = b_n + 5b_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

☐ **b)** $a_n + b_n = -3^{n+1} + 5 \cdot 2^n$ para todo n.

☐ **c)** $a_n = b_n$ para todo n.

☐ **d)** $a_{2n+1} = -1$ para todo n.

2. Relativamente à sucessão $\langle u_n \rangle$, $u_n = 7^n - 2^n$, $n \geq 0$, considere as afirmações seguintes:

(i) *Cada termo u_n da sucessão é um múltiplo de* 5,

(ii) $\langle u_n \rangle$ *coincide com a sucessão* $\langle v_n \rangle$ *definida por* $v_0 = 0$, $v_1 = 5$, $v_n = 9v_{n-1} - 14v_{n-2}$, $n \geq 2$.

☐ **a)** Ambas as afirmações são verdadeiras.

☐ **b)** A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa.

☐ **c)** A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira.

☐ **d)** Ambas as afirmações são falsas.

3. Seja $a_n = 2^n + 3(-1)^n$ uma solução de uma fórmula de recorrência $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, cujas raízes do polinómio característico são λ_1 e λ_2. Então:

☐ **a)** $a = 1$, $b = 3$.

☐ **b)** $a = 2$, $b = -1$.

☐ **c)** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

☐ **d)** $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

4. Para cada número natural $n \geq 1$, a_n é o número de sequências binárias de comprimento n que terminam em 1 e não contêm nenhum bloco 00. Qual das seguintes relações de recorrência define a_n?

- ☐ **a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ com $a_1 = 1, a_2 = 1$.
- ☐ **b)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ com $a_1 = 1, a_2 = 2$.
- ☐ **c)** $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ com $a_1 = 1, a_2 = 1$.
- ☐ **d)** $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ com $a_1 = 1, a_2 = 2$.

II - Problemas

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

5. Considere a sucessão $\langle d_n \rangle$ definida por $d_0 = 1$ e por $d_n = nd_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$.

a) Mostre, por indução matemática, que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

b) Obtenha a igualdade acima pelo método da substituição de diante para trás.

6. No decurso da resolução dum determinado problema diz-se que se está no n-ésimo estado se, e somente se, se estiver a n passos da solução. Em cada estado n há cinco caminhos a seguir com vista a chegar à solução. Dois destes caminhos conduzem ao estado $n-1$, enquanto os outros três conduzem ao estado $n-2$. Seja a_n o número de maneiras de chegar à solução a partir dum estado n. Suponha que $a_1 = 2$.

a) Mostre que $a_2 = 7$.

b) Obtenha uma relação de recorrência para a_n e resolva-a.

7. Considere a relação de recorrência $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$, $n \geq 2$, sujeita às condições iniciais $x_0 = 2$, $x_1 = 4$. Determine, por recurso ao método do polinómio característico, a solução a_n, $n \geq 0$.

8. Sejam $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ duas sucessões definidas recursivamente pelo sistema

$$\begin{cases} a_n = 3b_{n-1} - a_{n-1} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-1} \end{cases}, \ n \geq 1$$

e pelos termos $a_0 = 4$, $b_0 = 0$.

a) Determine os termos a_1 e a_2 da sucessão $\langle a_n \rangle$ e os termos b_1 e b_2 da sucessão $\langle b_n \rangle$.

b) Determine as expressões dos termos gerais a_n e b_n.

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Atendendo à definição de multiplicação de matrizes qualquer potência A^n é da forma $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix}$ com $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$a_n - \text{ designa os elementos da diagonal principal de } A^n$$
$$b_n - \text{ designa os elementos não diagonais de } A^n$$

a) Determine os primeiros 3 termos de cada uma das sucessões $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$, isto é, determine a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3. Justifique que $\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

b) Determine uma relação de recorrência para a sucessão a_n e uma relação de recorrência para a sucessão b_n.

c) Determine b_n pelo método do polinómio característico. Determine o termo geral a_n.

FIM