ANÁLISE INFINITESIMAL | 21175

Desenvolvimento

6. Consider a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) - 4x^2 - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2(3 + e^{\frac{1}{x}}), & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

a) Determine o domínio de f.

No primeiro ramo, a expressão analítica da função f envolve uma função trigonométrica e polinómios. Como estas funções têm domínio $\mathbb{R}$, f está definida para qualquer $x \geq 0$.

No segundo ramo, a expressão de f envolve polinómios (de domínio $\mathbb{R}$) e a função $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ de domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $x = 0$ não pertence a $]-\infty\,;0[$, f está definida para qualquer $x < 0$.

Conclui-se que o domínio de f é $]-\infty, 0[\cup[0, +\infty[= \mathbb{R}$.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Tem-se que $-1 \leq cos(2x) \leq 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$cos(2x) - 4x^2 - 1 \leq 1 - 4x^2 - 1 = -4x^2, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, tem-se que $\lim_{x\to+\infty} -4x^2 = -\infty$. Logo, por enquadramento,

$$\lim_{x\to+\infty} cos(2x) - 4x^2 - 1 = -\infty$$

Para o outro limite temos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2(3+e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \times \lim_{x\to-\infty} (3+e^{\frac{1}{x}}) = +\infty \times (3+e^0) = +\infty$$

c) Mostre que f é contínua no ponto 0.

A função f é contínua no ponto 0 se:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Temos então:

$$f(0) = \cos(2\times 0) - 4\times 0^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(2x) - 4x^2 - 1 = \cos(0) - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2(3 + e^{\frac{1}{x}}) = 0(3+0) = 0$$

visto que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ e, por consequência $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$.
Assim, os limites laterais em $x = 0$ existem, são iguais e este valor coincide com a imagem de f em 0. Logo, por definição, f é contínua em 0.

d) Mostre que existe $x \in [0, \pi]$ tal que $f(x) = -1$.

Já vimos na alínea c) que a função é contínua em $x = 0$. Para $x > 0$ a função é contínua por ser soma de uma função trigonométrica e de uma função polinomial, ambas contínuas em $\mathbb{R}$. Assim a função f é contínua para $x \geq 0$ e, portanto, é contínua quando restringimos ao conjunto $[0, \pi]$. Temos que $f(0) = 0$ e $f(\pi) = cos(4\pi) - 4\pi^2 - 1 = -4\pi^2$. Como $\pi > 3$ temos que $\pi^2 > 9$ e $4\pi^2 > 36$. Logo $f(\pi) < -36$. Visto a função ser contínua em $[0\pi]$ e $f(\pi) < f(0)$ o teorema de Bolzano garante que f atinge em $]0, \pi[$ todos os valores em $]f(\pi), f(0)[$. Como $f(\pi) < -36 < -1 < 0$ a conclusão é que f atinge o valor -1 para algum valor em $]0, \pi[$.

FIM