FORMULÁRIO

TEOREMA LIMITE CENTRAL (E SEU COROLÁRIO)

Sejam X_1, X_2,..., X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com valor médio μ e variância σ^2, finita. Então, para n suficientemente grande,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \,\dot{\cap}\, N(n\mu,\ \sigma\sqrt{n}\,) \ \Rightarrow\ \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = Z \,\dot{\cap}\, N(0,\ 1)$$

$$\text{e} \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,\dot{\cap}\, N(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \ \Rightarrow\ \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = Z \,\dot{\cap}\, N(0,\ 1)$$

DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS:

Estatística	σ^2 conhecida?	população	Distribuição amostral
$\overline{X}$	Sim	Normal (*)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \cap N(0,\ 1)$
	Não	Normal (*)	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \cap t_{n-1}$
S^2	-	Normal	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cap \chi^2_{n-1}$
$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$	Sim	Normais (*)	$Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \cap N(0,\ 1)$
	Não ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	Normais (*)	$T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \cap t_{n_1+n_2-2}$
$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	-	Normais	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cap F_{n_1-1,n_2-1}$
$\overline{P}$	-	Bernoulli	$Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}}} \,\dot{\cap}\, N(0,\ 1)$
$\overline{P}_1 - \overline{P}_2$	-	Bernoulli	$Z = \dfrac{(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \,\dot{\cap}\, N(0,\ 1)$

(*)Quando as populações não seguem uma distribuição normal, para amostras suficientemente grandes, podemos aplicar o Teorema Limite Central e considerar uma distribuição amostral aproximadamente normal.

MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO PONTUAL:

- **Método de máxima verosimilhança:**

  Seja (X_1, X_2, ..., X_n), uma a. a. duma dada população com função (densidade) de probabilidade,.f(x; θ). Observada uma amostra em concreto, (x_1, x_2, ..., x_n):

  1. Determinar a função de verosimilhança L(θ; x) = $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$;
  2. Aplicar a transformação logarítmica à função de verosimilhança ln L(θ; x), se tal for necessário;
  3. Determinar os pontos onde a 1ª derivada de L(θ; x) ou de ln L(θ; x) em ordem a θ se anula, ou seja, procurar a solução de

  $$\frac{\partial L(\theta;x)}{\partial \theta} = 0 \text{ ou } \frac{\partial \ln L(\theta;x)}{\partial \theta} = 0 \text{ ;}$$

  4. Verificar se a 2ª derivada de L(θ; x) ou de ln L(θ; x) em ordem a θ é negativa, para o ponto encontrado:

  $$\left.\frac{\partial^2 L(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \text{ ou } \left.\frac{\partial^2 \ln L(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

ALGUMAS PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES PONTUAIS:

Sejam $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ dois estimadores para o parâmetro θ,

- $\hat{\theta}$ é um **estimador centrado** ou **não enviesado** de θ se E[$\hat{\theta}$] = θ;

  $\hat{\theta}$ é um **estimador não centrado** ou **enviesado** de θ se E[$\hat{\theta}$] $\neq$ θ, e Viés[$\hat{\theta}$]= E[$\hat{\theta}$] - θ;

- se $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ são dois estimadores centrados de θ, $\hat{\theta}$ diz-se **mais eficiente** do que $\tilde{\theta}$ se

  $$\text{Var}[\hat{\theta}] < \text{Var}[\tilde{\theta}];$$

- $\hat{\theta}$ diz-se **suficiente** se utiliza toda a informação disponível na amostra, relevante para a estimação do parâmetro θ;
- Um estimador $\hat{\theta}$ diz-se **consistente** quando para qualquer valor positivo ε, se verifica a condição:

  $$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right| < \varepsilon\right] = 1$$

  Teorema: As condições: 1. $\lim_{n\to+\infty} E\left[\hat{\theta}\right] = \theta$; 2. $\lim_{n\to+\infty} \text{Var}\left[\hat{\theta}\right] = 0$, são suficientes para que $\hat{\theta}$ seja estimador **consistente**.

INTERVALOS DE CONFIANÇA:

Parâmetro	σ^2 conhecido?	população	Variável fulcral	Intervalo de Confiança $(1-\alpha)100\%$
μ	Sim	Normal	$Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cap N(0,1)$	$\left]\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
	Não	Normal	$T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \cap t_{n-1}$	$\left]\overline{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right[$
σ^2	—	Normal	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cap \chi^2_{(n-1)}$	$\left]\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} ; \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right[$
$\mu_1 - \mu_2$	Sim	Normais	$Z = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \cap N(0,1)$	$\left]\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} ; \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right[$
	Não ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	Normais	$T = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cap t_{n_1+n_2-2}$	$\left]\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}} S^* ; \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}} S^*\right[$ onde $S^* = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	—	Normais	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cap F_{n_1-1,n_2-1}$	$\left]\dfrac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \dfrac{S_1^2}{S_2^2} ; \dfrac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}}} \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right[$
p	—	Bernoulli	$Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{\circ}{\cap} N(0,1)$	$\left]\overline{P} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} ; \overline{P} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right[$
$p_1 - p_2$	—	Bernoulli	$Z = \dfrac{\left(\overline{P}_1 - \overline{P}_2\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \overset{\circ}{\cap} N(0,1)$	$\left]\overline{P}_1 - \overline{P}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \dfrac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}} ;\right.$ $\left.\overline{P}_1 - \overline{P}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \dfrac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}\right[$