UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21021

Computação Numérica

29 de julho de 2014

INSTRUÇÕES

Para a resolução do teste, leia as seguintes informações e instruções, antes de responder

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução do teste.
- O enunciado do teste incide sobre os cap. 1 a 4 do livro recomendado e sobre a linguagem de programação octave, tem **4** páginas e termina com a palavra **FIM**.
- O único elemento de consulta permitido é o formulário que se encontra anexo a este enunciado.
- Para a execução do exame É INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- O cabeçalho deve ser preenchido de modo legível antes do início da resolução.
- As respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível por outra pessoa.
- As suas respostas devem ser claras, **indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão**. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respetivas questões.
- O tempo de realização do teste é de 120 minutos, mais 30 minutos de tolerância.

I [3 valores]

Considere $x = 0.274528...$ e a aproximação $\bar{x} = 0.274$,

1.1. [1.5] Determine limites superiores ε_{LS}, r_{LS} respetivamente para os erros absoluto $\varepsilon \le \varepsilon_{LS}$ e relativo $r \le r_{LS}$. Os limites devem ser os menores possíveis para a precisão dada para x e $\bar{x}$.

1.2. [0.75] Baseado no erro absoluto determinado na alínea anterior, determine quantos algarismos significativos tem a aproximação dada. Justifique.

1.3. [0.75] Obtenha um novo valor aproximado, por arredondamento (simétrico) da terceira casa decimal. Quantos algarismos significativos tem esta aproximação? Justifique.

II [3 valores]

Considere a seguinte equação,

$$x - \cos x = 0$$

2.1. [1] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo [0, 1].

2.2. [1.5] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando quatro iterações do método da bissecção, a partir do valor inicial $a_0 = 0.6, b_0 = 0.8$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de $k, a_k, b_k, x_k, f(x_k)$, sinais de $f()$, para k=0,1,2,3.

2.3. [0.5] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

III [9 valores]

Considere a matriz A e a matriz aumentada B, onde I é a matriz identidade,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = [A \ \ \vdots \ \ I]$$

3.1. [3] A matriz inversa de A pode ser obtida por aplicação de operações elementares (método de eliminação de Gauss) na matriz aumentada B até se obter $B = [I \ \ \vdots \ \ X]$, onde $X = A^{-1}$. Aplique este método e determine a matriz X. Indique claramente as operações elementares realizadas em cada passo da resolução. Confirme que $A * X = I$.

3.2. [6] Escreva a função em Octave,

```
function X=gaussinv(A)
%
% Calculo da matriz inversa
% Metodo de Gauss
% A: Matriz a inverter
% X: Matriz inversa A*X=I
```

que implemente o método da eliminação de Gauss descrito na alínea anterior aplicado ao cálculo da matriz inversa de *A*.

IV [5 valores]

Considere a função $f(x) = \sin^2(x)$,

4.1. [3] Obtenha o polinómio p_2 de grau dois interpolador de $f(x)$ nos nós x_i em 0, 0.2, 0.4 (radianos), através da fórmula de Lagrange. Inicialize os cálculos a partir de valores de $f(x_i)$ com 5 algarismos significativos.

4.2. [2] Escreva um programa em octave que crie um gráfico conjunto do polinómio interpolador calculado (a preto, linha ponteada) e da função $f(x)$ (a azul, linha contínua) no intervalo de 0 a 0.4 com exatamente 50 pontos igualmente espaçados. O gráfico deve ter título, legenda no eixo das abcissas e grelha. Os pontos de interpolação devem ser assinalados com uma bola a vermelho.

FORMULÁRIO

Interpolação Polinomial

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,l_i(x)$$

$$l_i(x)=\prod_{j=0,\,j\neq i}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n} f\left[x_0,\ldots,x_i\right](x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0+sh)=f_0+s\,\Delta_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta_0^2+\ldots+\frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta_0^n$$

Equações Não Lineares

Método da bissecção

$$x_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$$

Método de Newton

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método da secante

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

Método do ponto fixo

$$x_{k+1}=g(x_k)$$

Sistemas de Equações Lineares

Factorização $A=LU$

$$u_{1j}=a_{1j}\quad j\geq 1$$

$$l_{i1}=a_{i1}/u_{11}\quad i\geq 2$$

$$u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\quad j\geq i\geq 2$$

$$l_{ji}=(a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki})/u_{ii}\quad j>i\geq 2$$

Factorização (Choleski) $A=LL^T$

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1}=a_{i1}/l_{11}\quad i\geq 2$$

$$l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}\quad i\geq 2$$

$$l_{ji}=\left(a_{ji}-\sum\nolimits_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{jk}\right)/\,l_{ii}\quad j>i\geq 2$$

FIM