UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

p-Fólio

U.C. 21037

Elementos de Probabilidades e Estatística

19 de junho de 2017

-- INSTRUÇÕES --

- O estudante deverá responder à totalidade da prova na folha de ponto, preenchendo o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique, no momento da entrega, se as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se para efeitos de classificação toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O enunciado da prova possui as páginas numeradas (exceto esta) e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta nas suas respostas.
- **É permitida** a utilização de máquina de calcular científica. **Não é permitida** a consulta de quaisquer outros materiais de estudo e tecnologias pessoais. Em **Anexo** encontra-se um formulário e tabela da função distribuição Normal Reduzida (normal padrão).

Critérios de Avaliação e Cotação

- Para além da correção científica das respostas, são considerados a clareza e a objetividade da resposta, a sua estrutura lógica e a notação utilizada.
- Justifique todas as afirmações e cálculos que realizar e verifique sempre se os conteúdos da resposta se adequam ao solicitado pela questão. A apresentação de cálculos e de resultados numéricos sem justificação dos mesmos será penalizada na avaliação.
- Se precisar de um resultado de uma alínea anterior para resolver outra alínea, as suposições que necessite fazer (caso façam sentido), serão levadas em linha de conta aquando da correção.
- **A cotação do p-Fólio é de 12 valores**, tendo a seguinte distribuição:

1.	2.	3.
4 val.	4 val.	4 val.

Duração máxima da prova: 90 minutos.

1. Uma empresa de reparações de equipamento informático realiza o seguinte procedimento, aquando da admissão de novos funcionários: os candidatos realizam um teste escrito num primeiro momento, seguindo-se um estágio curto, com o objetivo de verificar as suas aptidões para a profissão. Do historial anterior, concluiu-se que em regra aprovam no teste 60% dos candidatos. Dos candidatos que aprovam no teste, 85% concluem o estágio com sucesso.
A empresa deu a oportunidade dos candidatos que reprovaram no teste frequentarem o estágio. Deste grupo verificou-se que 55% concluíram o estágio com sucesso.

a) (2.0 v) Qual a probabilidade de um candidato escolhido ao acaso de entre todos os candidatos concluir o estágio com sucesso? Justifique.

b) (2.0 v) Considere que o número de chamadas telefónicas recebidas a cada 5 minutos pelo serviço de Apoio ao Cliente é uma variável aleatória que segue uma distribuição Poisson de valor médio λ. Sabendo que se verifica P(X=1)=P(X=2), calcule a probabilidade de serem recebidas 4 chamadas num período de 10 minutos. Justifique, e assuma os pressupostos que precisar para resolver o problema.

2. Considere o seguinte quadro.

f(x,y)	**x=1**	**x=2**	**x=3**	**$f_X(x)$**
y=2	0.04		0.12	
y=3			0.02	0,6
y=4	0.02	0.05		
$f_Y(y)$	0.21		0.27	

a) (2.0 v) Complete o quadro de modo a obter a função de probabilidade conjunta de *X* e *Y* e das respetivas funções de probabilidade marginais. Justifique.

b) (2.0 v) Calcule as probabilidades $P(1 \leq X < 3 | Y > 2)$, $P(X \times Y < 6)$ e o primeiro quartil (Q_1) de X. Justifique.

3. O consumo diário de uma certa matéria-prima metálica utilizada no fabrico de um produto é uma variável aleatória com a seguinte função densidade de probabilidade (em dezenas de toneladas):

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ kx & ; \quad 0 < x \leq 2 \\ 1-kx & ; \quad 2 < x \leq 4 \\ 0 & ; \quad x > 4 \end{cases}$$

a) (2.0 v) Determine a constante **k** por forma a que *f*(x) represente efetivamente uma função densidade de probabilidade.

b) (2.0 v) Considere a variável aleatória Y que representa o desperdício diário de matéria-prima. Sabe-se que o valor médio de Y é de μ=180kg e que o desvio-padrão é σ=30kg. Selecionados ao acaso dois dias de produção, calcule a probabilidade de que em ambos tenham sido desperdiçados mais de 250kg de matéria-prima. Indique os pressupostos que assume e justifique os resultados.

Formulário

Probabilidade condicional e teorema de Bayes

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},\ P(B)>0\ ;\ P(A_j|B)=\frac{P(B|A_j)\times P(A_j)}{P(B)}\ ;\ P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)\times P(A_i)$$

Função de probabilidade e função de distribuição (var. univariadas)

$$f_X(x_i)=P(X=x_i)\quad F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i<x}f_X(x_i);\ F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx\quad E[X^k]=\mu^k=\sum_i x_i^k f_X(x_i)$$

$$E\left[X^k\right]=\mu^k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f_X(x)dx\quad E[K.X]=K.E[X];\ Var[X]=\sigma^2=E[X^2]-(E[X])^2\quad Var[K.X]=K^2.Var[X]$$

Variáveis aleatórias bidimensionais (X,Y)

$$f_{X,Y}(x_i,y_j)=P(X=x_i,Y=y_j);\quad f_{X|Y}(x_i|y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$$

$$f_X(x_i)=\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)\quad f_Y(y_j)=\sum_i P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}f_{X,Y}(x_i,y_j)$$

$$Var[X\pm Y]=Var[X]+Var[Y]\pm 2\,Cov[X,Y];\quad Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]$$

$$E[X.Y]=\sum_i\sum_j x_i\,y_j\,f_{X,Y}(x_i,y_j);\quad E[X|Y=y_j]=\sum_i x_i\,f_{X|Y=y_j}(x_i|y_j)\quad \rho_{X,Y}=\frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}}$$

Modelo	Expressão da Função de probabilidade	μ=E[X]	σ²=Var[X]
Bernoulli	$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$ x=0,1.	*p*	*p(1-p)*
Binomial	$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ x=0,1,…n	*np*	*np(1-p)*
Poisson	$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	λ	λ
Uniforme	$P(X=x)=\frac{1}{n}$	$\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{n^2-1}{12}}$
Geométrica	$P(X=x)=(1-p)^{x-1}p$	$\boldsymbol{\frac{1}{p}}$	$\boldsymbol{\frac{1-p}{p^2}}$
Hipergeométrica	$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}=n\times p$	$n\frac{M}{N}.\frac{N-M}{N}.\frac{N-n}{N-1}$

	Expressões das funções de:			
Modelo	**densidade**	**distribuição**	**μ=E[X]**	**σ²=Var[X]**
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a}\ x\in[a,b]$	$F_X(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$	$\boldsymbol{\frac{a+b}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{(b-a)^2}{12}}$
Exponencial	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$F(x)=1-e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal	$\boldsymbol{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$		$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\sigma^2}$

Valores da Função Distribuição Normal Padrão ou Reduzida (z positivo)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998
4.1	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99999	0.99999
4.2	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.3	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.4	0.99999	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Nota: $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
F (*z*)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995

FIM