Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre de 27 de Março a 5 de Abril de 2020

Tema

Programação linear

Enunciado

1. (1.0 val.)

Em tempo de pandemia, uma empresa de vestuário passou a produzir e vender dois tipos de máscaras. Na produção são usadas duas máquinas, A e B, cada uma trabalhando um máximo de 16 e 18 horas semanais, respectivamente.
Para produzir 1000 máscaras do primeiro tipo são necesssárias 2 horas de trabalho na máquina A e 6 horas de trabalho na máquina B. Para a mesma quantidade de máscaras de tipo 2, são necessárias 4 horas de trabalho na máquina A e 2 horas de trabalho na máquina B.
Por cada 1000 máscaras (de qualquer um dos tipos), a empresa lucra 500 euros.
Sabendo que já foi efectuada uma encomenda de 10000 de máscaras, com a condição de pelo menos 5000 sejam de tipo 1, formalize o problema que permite maximizar o lucro.

Resolução:
Variáveis de decisão:
X: quantidade de máscaras de tipo 1 (em milhares) produzidas semanalmente
Y: quantidade de máscaras de tipo 2 (em milhares) produzidas semanalmente

Função objetivo, a maximizar:

$$F(X,Y) = 500X + 500Y$$

Restrições:
$2X + 4Y \leq 16$ condição no número máximo de horas de produção da máquina A
$6X + 2Y \leq 18$ condição no número máximo de horas de produção da máquina B
$X + Y \geq 10$ já foi feita uma encomenda de 10000 máscaras
$X \geq 5$ da encomenda de 10000 máscaras, pelo menos 5000 têm de ser de tipo 1

Assim, o problema formaliza-se como:

$$\max F = 500X + 500Y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 2X + 4Y \leq 16 \\ 6X + 2Y \leq 18 \\ X + Y \geq 10 \\ X \geq 5 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

2. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max F = 150X + 120Y$$

sujeito a

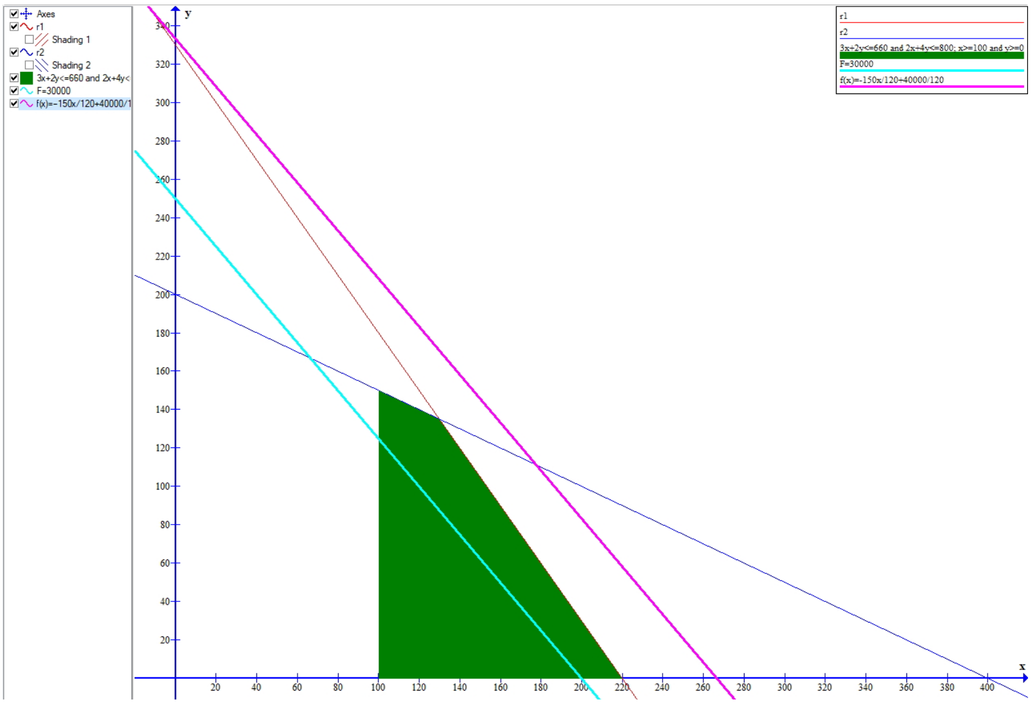
$$\begin{cases} 3X + 2Y \leq 660 \\ 2X + 4Y \leq 800 \\ X \geq 100 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.2 val.) Escreva um enunciado (realista) que se consiga adaptar ao problema em causa. Explique o que representam as variáveis de decisão, o que representa a função objetivo, assim como cada uma das restrições.

b) (1.0 val.) Desenhe o polígono admissível e resolva o problema pelo método gráfico. O que aconteceria à solução óptima se a função objetivo fosse substituída pela função com a seguinte expressão?

$$F(X, Y) = 150X + 300Y$$

Resolução:
A reta $3X + 2Y = 660$ passa nos pontos $(0, 330)$ e $(220, 0)$.
A reta $2X + 4Y = 800$ passa nos pontos $(0, 200)$ e $(400, 0)$.



As retas de nível da função F são dadas pelas retas $150X + 120Y = z$ para algum $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$Y = -\frac{150}{120}X + \frac{z}{120} = -\frac{5}{4} + \frac{z}{120}.$$

Assim, o valor da função F aumenta à medida que aumenta o valor de z. Logo, o valor óptimo é atingido na intersecção das rectas correspondentes às duas restrições:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = 660 \\ 2X + 4Y = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y = 660 - 3X \\ 2X + 2(660 - 3X) = 800 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2Y = 660 - 3X \\ -4X = 800 - 1320 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y = 660 - 3X \\ X = 130 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2Y = 660 - 390 \\ X = 130 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 130 \\ Y = 135 \end{cases}$$

Assim, o valor máximo é atingido no ponto (130,135), ou seja, quando $X = 130$ e $Y = 135$, sendo o valor máximo igual a $F(130, 135) = 37500$.

Se a função objectivo fosse $F(X, Y) = 150X + 300Y$, então as curvas de nível seriam as rectas com equação $150X + 300Y = z$ com $z \in \mathbb{R}$, ou seja, $Y = -\frac{1}{2}X + \frac{z}{300}$, sendo paralelas à recta correspondente à segunda restrição. Assim, todos os pontos em cima da aresta do polígono correspondente à segunda restrição, são soluções óptimas.

c) (1.5 val.) Resolva o problema pelo método do simplex, usando duas técnicas distintas.

Resolução:
Problema na forma standard:

$$\max F = 150X + 120Y + 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 - M\alpha$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 3X + 2Y + F_1 = 660 \\ 2X + 4Y + F_2 = 800 \\ X - F_3 + \alpha = 100 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Vamos resolver por 2 métodos.

i) Método da base artificial

base	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ_i
F_1	3	2	1	0	0	0	660	
F_2	2	4	0	1	0	0	800	
	1	0	0	0	-1	1	100	
F	-150	-120	0	0	0	M		
F_1	3	2	1	0	0	0	660	220
F_2	2	4	0	1	0	0	800	400
F_3	1	0	0	0	-1	1	100	100 $\leftarrow$
F	$-M-150$ $\uparrow$	-120	0	0	M	0	-100M	
F_1	0	2	1	0	3	-3	360	120 $\leftarrow$
F_2	0	4	0	1	2	-2	600	300
X	1	0	0	0	-1	1	100	—
F	0	-120	0	0	-150 $\uparrow$	$M+150$	15000	
F_3	0	2/3	1/3	0	1	-1	120	180
F_2	0	8/3	-2/3	1	0	0	360	135 $\leftarrow$
X	1	2/3	1/3	0	0	0	220	330
F	0	-20 $\uparrow$	50	0	0	M	33000	
F_3	0	0	1/2	-1/4	1	-1	30	
Y	0	1	-1/4	3/8	0	0	135	
X	1	0	1/2	-1/4	0	0	130	
F	0	0	45	15/2	0	M	35700	

ii) Método das duas fases:

1.ª fase: minimizar a soma das variáveis artificiais:

$$\min A = \alpha \Leftrightarrow \max B = -\alpha$$

base	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ_i
F_1	3	2	1	0	0	0	660	
F_2	2	4	0	1	0	0	800	
	1	0	0	0	-1	1	100	
B	0	0	0	0	0	1		
F_1	3	2	1	0	0	0	660	220
F_2	2	4	0	1	0	0	800	400
α	1	0	0	0	-1	1	100	100 $\leftarrow$
B	-1	0	0	0	1	0	-100	
	$\uparrow$							
F_1	0	2	1	0	3	-3	360	
F_2	0	4	0	1	2	-2	600	
X	1	0	0	0	-1	1	100	
B	0	0	0	0	0	1	0	

2.ª fase: maximizar F

base	X	Y	F_1	F_2	F_3	TI	Δ_i
F_1	0	2	1	0	3	360	
F_2	0	4	0	1	2	600	
X	1	0	0	0	-1	100	
F	-150	-120	0	0	0		
		$\uparrow$					
F_1	0	2	1	0	3	360	120
F_2	0	4	0	1	2	600	300 $\leftarrow$
X	1	0	0	0	-1	100	—
F	0	-120	0	0	-150	15000	
					$\uparrow$		
F_1	0	2/3	1/3	0	1	120	180
Y	0	8/3	-2/3	1	0	360	135 $\leftarrow$
X	1	2/3	1/3	0	0	220	330
F	0	-20	50	0	0	33000	
		$\uparrow$					
F_3	0	0	1/2	-1/4	1	30	
Y	0	1	-1/4	3/8	0	135	
X	1	0	1/2	-1/4	0	130	
F	0	0	45	15/2	0	35700	

Por qualquer um dos métodos se conclui que a solução óptima é atingida quando $X^* = 130$, $Y^* = 135$ e $F_3^* = 30$. O valor óptimo de F é 35700. Repare-se que foram obtidos os mesmos resultados que na alínea anterior.

d) (0.3 val.) Face ao problema descrito na alínea a), interprete a solução óptima determinada na alínea c). Não se esqueça de interpretar as variáveis de decisão, as variáveis de folga e o valor óptimo da função objetivo.

Resolução:
Cada resposta estará dependente da alínea a), mas é importante referir que o valor óptimo de F é 35700 e é atingido quando $X^* = 130$ e $Y^* = 135$. A variável de folga F_3 é 30, que corresponde à terceira restrição ter sido respeitada com uma folga de 30 unidades (visto que $X^* = 130$ e a restrição era $X \geq 100$).

FIM