ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Solução do p-fólio de 26 de julho

I. Questões de escolha múltipla:

Na **Questão 1** podemos calcular o determinante de A usando a primeira coluna da matriz 4×4, e depois usar novamente a primeira coluna da matriz 3×3, e obter $\det A = 24$.

Na **Questão 2** tem-se

$$A^2 - 5A = 0 \implies \det(A^2-5A) = 0 \implies \det A(A-5I_n) = 0,$$

e portanto $\det A = 0$ ou $\det(A-5I_n) = 0$, o que equivale à alínea b).

Na **Questão 3** é fácil ver que F tem dimensão 2, e como $(1,3,-2,-4) \notin F$ sobra b). Como F tem dimensão 2 e os 2 vetores são linearmente independentes, basta ver que pertencem a F para concluirmos que de facto formam uma base.

II. A afirmação é falsa.

Se 2 fosse valor próprio de A então sabemos que $\det(A-2I_n) = 0$ e portanto $\det(A-2I_n)\det A = 0$ e não seria possível ter $A^2 - 2A = I_n$, pois isso implicaria $\det(A-2I_n)\det A = \det(A^2-2A) = \det I_n = 1$.

III. Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Os valores próprios da matriz A são as soluções de $\det(A-\lambda I_3) = 0$, ou seja de

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Usando a primeira linha para calcular este determinante tem-se

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)((3-\lambda)^2-4).$$

Como $(3-\lambda)^2-4 = (3-\lambda-2)(3-\lambda+2) = (-\lambda+1)(-\lambda+5)$, os valores próprios da matriz A são -3, 1 e 5.

b) O espaço próprio associado ao valor próprio -3 é gerado $(1,0,0)$.

O espaço próprio associado ao valor próprio 1 é gerado $(0,1,-1)$.

O espaço próprio associado ao valor próprio 5 é gerado $(0,1,1)$.

c) A matriz A é diagonalizável pois é uma matriz 3×3 com 3 valores próprios distintos, e portanto tendo em conta a ordem dos valores próprios na matriz dada, existe uma matriz invertível P que tem por colunas os vetores próprios pela mesma ordem, ou seja $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. **a)** O núcleo de T consiste nas soluções de $T(x,y,z,) = 0$, ou seja as soluções de $\begin{pmatrix} x+y & y-z \\ x+z & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. O núcleo é gerado por $(1,-1,-1)$.

b) Usando o Teorema da Dimensão , $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc } T + \dim \text{Im } T$, ou ainda $3 = 1 + \dim \text{Im } T$, e portanto a dimensão da imagem de T é $3 - 1 = 2$.

c) A matriz $\mathscr{M}(\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}, T)$ que representa T nas bases canónicas em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é a matriz que tem por colunas a sequência das coordenadas da imagen dos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Como

$$\begin{cases} T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

tem-se $\mathscr{M}(\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}, T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V. Como A e B são invertíveis tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e portanto

$$\begin{aligned} \text{adj}(AB) &= \det(AB) \times (AB)^{-1} \\ &= (\det A \det B) \times \left(B^{-1}A^{-1}\right) \\ &= \left(\det B \times B^{-1}\right)\left(\det A \times A^{-1}\right) \\ &= (\text{adj}\, B)(\text{adj}\, A). \end{aligned}$$

FIM