

U.C. 21037
Elementos de Probabilidades e Estatística
3 de julho de 2015

- INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O p-fólio é composto por 3 grupos de questões, contém 1 página e termina com a palavra **FIM** e por um formulário de duas páginas. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- É permitido o uso de máquina de calcular. Não é permitido a utilização de elementos de consulta.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 hora e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A distribuição da cotação total (12 valores) pelos 3 grupos de questões é a seguinte:

Grupo	1	2	3
Cotação	1.0	4.50	6.50

1. Numa empresa existe um grande número de telefones. Após muitas observações, concluiu-se que o número de telefones que avariaram em cada mês é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de média 2.5. Calcule a probabilidade de durante um mês se avariarem mais de 5 telefones.
2. Seja (X, Y) um par aleatório **discreto**. A informação conhecida sobre a função de probabilidade conjunta de (X, Y) e sobre as funções de probabilidade marginal é a que consta no quadro seguinte:

$f(x, y)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$f_X(x)$
$x = 0$	0.10		0.20	0.45
$x = 1$		0.15	0.15	
$x = 2$	0.05			
$f_Y(y)$	0.25		0.40	

- 2.1. Complete o quadro, justificando detalhadamente todos os raciocínios e cálculos que efectuar.
 - 2.2. Calcule $P(X \leq 1, Y = 1)$ e $P(Y \geq 2)$.
 - 2.3. Calcule a covariância entre X e Y e indique que conclusões se poderão tirar relativamente à independência, ou não, das variáveis aleatórias X e Y .
3. Considere a seguinte função densidade de probabilidade de uma variável aleatória **contínua** X :

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } 0 < x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- 3.1. O valor da constante c .
- 3.2. Todos os momentos $E(X^k)$ da variável aleatória X .
- 3.3. $P(1 < X \leq 2)$ e $P(X < 2 | X \geq 1)$.
- 3.4. A função de distribuição de X e, utilizando esta função, confirme os resultados obtidos na alínea 3.3.

FIM

FORMULÁRIO

Modelos	Expressão das funções de Probabilidade	μ	σ^2
Bernoulli	$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$ $x=0,1$	p	$p(1-p)$
Binomial	$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $x=0,1,..n$	np	$np(1-p)$
Poisson	$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $x=0,1,...$	λ	λ
Uniforme	$P(X = x) = \frac{1}{n}$ $x=0,1,...$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Geométrica	$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}; x=1,...$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeométrica	$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

		Expressão das funções de:		μ	σ^2
Modelos	Densidade	Distribuição			
Exponencial	$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad x > 0$	$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x) \quad x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in [a, b]$	$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad x \in [a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$		μ	σ^2	

