Lógica e Teoria de Conjuntos | 21079

RESOLUÇÃO

Nome: ....

B. I.: .... **Nº de Estudante:** ....

Curso: .... **Turma:** ....

Data: .... **Ano Lectivo:** 2017/18

Docentes: Gilda Ferreira e Patrícia Engrácia

1. Considere o Teorema de Lagrange:

Se G é um grupo finito e H é subgrupo de G então a ordem de H divide a ordem de G.

Considere as proposições seguintes.

p: "G é um grupo finito"

q: "H é subgrupo de G"

r: "A ordem de H divide a ordem de G"

(a) Escreva o Teorema de Lagrange na linguagem do cálculo de proposições.
Resolução:

$$p \wedge q \Rightarrow r$$

(b) Escreva a contraposta da proposição obtida na alínea anterior.
Resolução: A contraposta é

$$\neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q)$$

o que é logicamente equivalente a

$$\neg r \Rightarrow \neg p \vee \neg q$$

(c) Escreva a proposição obtida na alínea (b) em linguagem comum.

Resolução:

Se a ordem de H não divide a ordem de G então G não é um grupo finito ou H não é subgrupo de G.

2. Verifique se o seguinte conjunto de proposições é satisfazível

$$\{\neg(p \wedge q) \Rightarrow r,\ p \wedge q \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r),\ (p \Rightarrow \neg r) \wedge q\}.$$

Resolução:

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1

p	q	r	$\neg r$	$p \Rightarrow \neg r$	$(p \Rightarrow \neg r) \wedge q$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0

p	q	r	$\neg(p \wedge q) \Rightarrow r$	$p \wedge q \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$	$(p \Rightarrow \neg r) \wedge q$	
1	1	0	1	1	1	$\surd$

Logo o conjunto de proposições é satisfazível pois há uma atribuição de valores de verdade às constantes proposicionais (p verdadeiro, q verdadeiro e r falso) que torna as 3 fórmulas do conjunto verdadeiras.

3. Indique, justificando, se alguma das seguintes fórmulas não é uma contingência:

$p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$, $\neg(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$.

Resolução:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1

A fórmula $p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$ é uma contingência.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg p$	$\neg(p \vee \neg p)$	$q \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg p) \wedge q \vee \neg q$
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0

A fórmula $\neg(p \vee \neg p) \wedge q \vee \neg q$ não é uma contingência pois não há atribuições de verdade às constantes proposicionais dessa fórmula que a tornem verdadeira. Trata-se de uma contradição.

Não construindo a tabela de verdade poder-se-ía perceber que esta última fórmula não era uma contingência mas sim uma contradição por tratar-se de uma conjunção em que uma das fórmulas em conjunção ($\neg(p \vee \neg p)$) é falsa.

4.(a) Mostre que a fórmula $\neg p$ é consequência lógica da fórmula $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$.

Resolução:

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	
0	0	1	1	$\surd$

Logo, a proposição $\neg p$ é uma consequência lógica de $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$, pois qualquer atribuição de valores de verdade às constantes proposicionais que tornem $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$ verdadeira (neste caso existe apenas uma p e q ambos falsos) também torna $\neg p$ verdadeira.

(b) Demonstre que

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \vdash \neg p.$$

Resolução:

$-$	1.	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$	$Hip.$
$-$	2.	$p \Rightarrow q$	$1[\wedge E1]$
$-$	3.	$\neg q$	$1[\wedge E2]$
$\{4\}$	4.	p	$Hip.[\neg I]$
$\{4\}$	5.	q	$2,4[\Rightarrow E]$
$\{4\}$	6.	$\perp$	$3,5[\neg E]$
$-$	7.	$\neg p$	$4-6[\neg I]$

FIM