Elementos de Probabilidades e Estatística (21037)

4 setembro 2018

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.

	Homens	Mulheres	Total
Sobreviveram	367	344	711
Não sobreviveram	1364	126	1490
Total	1731	470	2201

1.1 `(0.75 valores)`

S - evento de uma pessoa ter sobrevivido; *(25% cotação)*

$$P(S) = \frac{711}{2201} \cong 0.323$$

A probabilidade da pessoa ter sobrevivido é de 32.3%. *(75% cotação)*

1.2 `(1 valor)`

S - evento de uma pessoa ter sobrevido;
M - evento de uma das pessoas que estava no Titanic ser mulher; *(25% cotação)*

$$P(S|M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} =$$

(50% cotação)

$$= \frac{344/2201}{470/2201} = \frac{344}{470} \cong 0.732$$

A probabilidade da pessoa ter sobrevivido é 32.3 %, se essa pessoa for mulher então a probabilidade de ter sobrevivido aumenta para 73.2 %. *(25% cotação)*

1.3 `(0.75 valores)`

H - evento de uma das pessoas que estava no Titanic ser homem; *(25% cotação)*

$$P(H) = \frac{1731}{2201} \cong 0.786$$

(75% cotação)

1.4 `(1 valor)`

S - evento de uma pessoa ter sobrevivido;
H - evento de uma das pessoas que estava no Titanic ser homem
(25% cotação)

$$P(\bar{S}|H) = \frac{P(\bar{S}) \cap H}{P(H)} =$$

(50% cotação)

$$= \frac{1364/2201}{0.786} \cong 0.788$$

A probabilidade da pessoa ser homem e de não ter sobrevivido, é praticamemente a mesma. A probabilidade da pessoa ter sobrevivido sendo mulher é muito maior do que a de ter sobrevivido sendo homem. *(25% cotação)*

1.5 `(1.5 valores)`

Dois eventos são independentes se $P(\bar{S} \cap H) = P(\bar{S})P(H)$ *(20% cotação)*

$$P(\bar{S} \cap H) = \frac{1364}{2201} \cong 0.62$$

(20% cotação)

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.323 = 0.677$$

(20% cotação)

$$P(H) = 0.786$$

(20% cotação)
Portanto $P(\bar{S} \cap H) = 0.62 \neq 0.677 \times 0.786 = P(\bar{S})P(H)$ e os eventos são claramente não independentes. *(20% cotação)*

2.

Consideremos as variáveis aleatórias X_i - peso da rapariga i, $i = 1, \ldots, 12$ e Y_j - peso do rapaz j, $J = 1, \ldots, 6$. Estas variáveis são independentes e tais que:

$$X_i \sim N(50, 5) \quad Y_j \sim N(60, 10) \quad i = 1, \ldots, 12\ ;\ j = 1, \ldots, 6$$

2.1 `(4.5 valores)`

O peso total do grupo de adolescentes é dado por

$$T = \sum_{i=1}^{12} X_i + \sum_{j=1}^{6} Y_j$$

(25% cotação)
Pelo que pretendemos calcular $P(T > 900)$.
A variável aleatória T é uma soma de v.a. normais e independentes logo estamos em condições de utlizar a lei normal, isto é, a lei de T é gaussiana.

$$E(T) = \sum_{i=1}^{12} E(X_i) + \sum_{j=1}^{6} E(Y_j) = 12 \times 50 + 6 \times 60 = 960$$

$$V(T) = \sum_{i=1}^{12} V(X_i) + \sum_{j=1}^{6} V(Y_j) = 12 \times 5^2 + 6 \times 10^2 = 900$$

(25% cotação)
Concluímos, que $T \sim N(960, 30)$

$$P(T > 900) = P\left(\frac{T - 960}{30} > \frac{900 - 960}{30}\right) = P(Z > -2)$$

(25% cotação)
Onde $Z = \frac{T-960}{30} \sim N(0, 1)$. Consultando a tabela da distribuição normal reduzida e atendendo à sua simetria

$$P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$$

A probabilidade da carga máxima ser excedida é 0.9772. *(25% cotação)*

2.2 `(2 valores)`

$$P(1000 < T < 1200) = P\left(\frac{1000 - 960}{30} < \frac{T - 960}{30} < \frac{1200 - 960}{30}\right) =$$
$$= P(1.33 < Z < 8)$$

(50% cotação)
Onde $Z = \frac{T-960}{30} \sim N(0, 1)$. Consultando a tabela da distribuição normal reduzida e atendendo à sua simetria

$$P(1.33 < Z < 8) = P(Z < 8) - P(Z < 1.33) = 0.9999 - 0.9082 \cong 0.0907$$

(50% cotação)

3. Seja X - v.a. que representa o número de partículas emitidas em cada período de 10 segundos.

3.1 `(2.5 valores)`

Sabemos que $X \sim P(\lambda)$, e que neste caso, $E(X) = V(X) = \lambda$. Então utilizando a fórmula

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Leftrightarrow \lambda = 6 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -3 \quad \vee \quad \lambda = 2$$

Como $\lambda > 0$, necessariamente $\lambda = 2$. *(25% cotação)*

Assim $X \sim P(2)$, tendo-se

$$P(X = k) = \frac{e^{-2}2^k}{k!}, \qquad k \in \aleph_0$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2}2^2}{2!} = 2e^{-2} \cong 0.27067$$

(50% cotação)

3.2 `(1.5 valores)`

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) =$$

(25% cotação)

$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} P(X = k) =$$

(25% cotação)

$$= 1 - \left(e^{-2}\frac{2^0}{0!} + e^{-2}\frac{2}{1!} + e^{-2}\frac{2^2}{2!} + e^{-2}\frac{2^3}{3!} \right) =$$

(25% cotação)

$$= 1 - \frac{19}{3}e^{-2} \cong 0.14288$$

(25% cotação)

4. Seja X - v.a que representa o número de fiscais engenheiros, nos 3 selecionados, para efetuar a visita.

4.1 `(3 valores)`

$X \sim H(N, M, n) = H(7, 2, 3)$ e

$$P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

(50% cotação)
pelo que

$$P(X=0)=\frac{\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}}=\frac{5\times4\times3}{7\times6\times5}=\frac{2}{7}$$

(10% cotação)

$$P(X=1)=\frac{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}}=\frac{2\times5\times4\times3}{7\times6\times5}=\frac{4}{7}$$

(10% cotação)

$$P(X=2)=\frac{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}}=\frac{5\times3\times2}{7\times6\times5}=\frac{1}{7}$$

(10% cotação) A função de probabilidade de X é então:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{2}{7}, & x=0\\ \frac{4}{7}, & x=1\\ \frac{1}{7}, & x=2\\ 0, & x\notin\{0,1,2\}\end{cases}$$

(10% cotação)

4.2 `(0.75 valores)`

$$E(X)=n\frac{M}{N}=3\frac{2}{7}=\frac{6}{7}\cong 0.857$$

4.3 `(0.75 valores)`

$$V(X)=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}=\frac{3\times2(7-2)(7-3)}{7^2(7-1)}=\frac{6\times20}{294}\cong 0.41$$