21165 - Geometria

Ano lectivo 2016/17
Docente: António Araújo

e-fólio A (25 a 30 de Abril)

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 1 página com 3 problemas e termina com a palavra FIM.
- Como o e-fólio tem um tempo prolongado de resolução, espera-se que as respostas que enviar estejam legíveis, com boa apresentação e organização. Deve fazer à parte o trabalho auxiliar e enviar apenas uma versão final, "limpa". Deve digitalizar a sua resolução de forma legível, ou executá-la directamente em formato digital (aceita-se word, pdf, ou scans em jpeg, png ou tiff - se usar varios ficheiros envie apenas um arquivo com todos eles, em rar ou zip). Respostas ilegíveis não serão cotadas, por isso verifique bem o seu ficheiro antes de enviar.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Tenha em atenção o prazo de entrega do e-fólio e as indicações para submeter a resolução disponibilizadas na sala de aulas virtual.
- O e-fólio é um trabalho individual. Pode utilizar recursos externos (pesquisa online, literatura, etc) mas não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os seus colegas.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores, assim distribuídos: todas as questões têm a mesma cotação.

Por favor preencha os seus dados:

- Nome:
- B.I:
- Nº de Estudante'
- Curso:

Problema 1. *Assumindo os axiomas A1-A3, mostre que existem pelo menos três rectas não-concorrentes (ou seja, tais que não existe um ponto que seja comum a todas).*

Solução: Por A3, existem três pontos não-colineares A,B,C. Por A1, existem as rectas AB, BC, CA, as únicas rectas que passam por cada par de pontos. AB e BC têm o ponto B em comum. Este é o único ponto comum às duas rectas, pois se tivessem outro, então por A1 seriam a mesma recta, e essa recta conteria os três pontos A, B, C, o que é impossível pois estes são não-colineares. Então, se existisse um ponto X comum às três rectas, esse ponto teria que ser $X = B$, pois teria em particular que ser comum às rectas AB e BC. Mas pelo mesmo argumento, as rectas BC e CA têm C como único ponto em comum, pelo que teria que ser $X = C$. Como $B \neq C$, não pode existir um ponto X comum às três rectas.

Problema 2. *Considere em R^2 a distancia do* máximo, *definida por:*

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = max\,\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

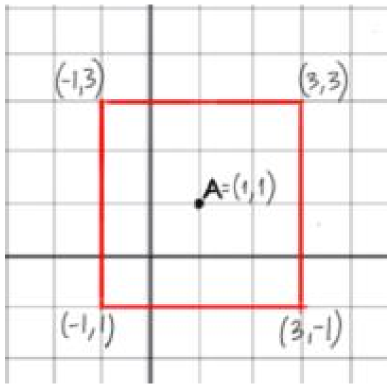
Desenhe:

1. *O conjunto dos pontos cuja distância a (1,1) é 2*
2. *O conjunto dos pontos equidistantes de (0,1) e (0,7)*

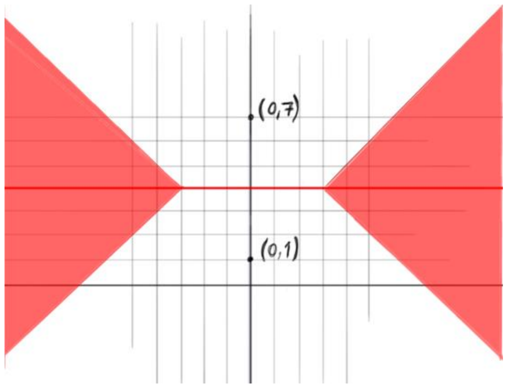
Solução:

Indico a vermelho os conjuntos que verificam as condições pedidas no enunciado:

2.a)



2.b)



Problema 3. *Considere o plano de incidência seguinte: os pontos são os pontos ordinários de $\mathbb{R}^2$ com a excepção do ponto $O = (0,0)$. As linhas são as circunferências de $\mathbb{R}^2$ que passam por O (com a excepção do próprio ponto O, que não pertence ao espaço de incidência).*

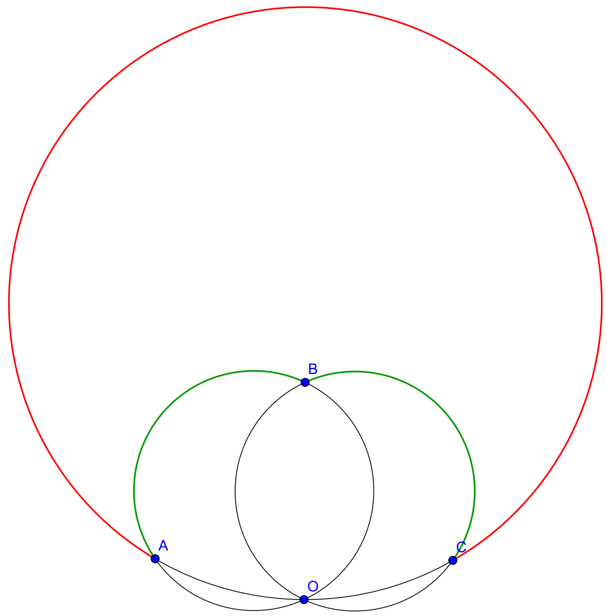
a) Mostre que se verificam os 3 axiomas de incidência plana.

b) Defina a distância $d(A,B)$ da seguinte forma: Há uma circunferência euclideana que passa por A, B e O. Essa circunferência tem um arco l que une A a B e não passa por O. Definimos $d(A,B)$ como sendo o comprimento euclideano do arco l. Diga se esta distância verifica a desigualdade triangular. Justifique.

Solução:

a) A2 e A3 são triviais. Obviamente cada circunferência contém dois pontos e existem três pontos por onde não passa uma mesma circunferência. A1 é mais interessante: Sabemos que no plano euclideano, três pontos não-colineares definem uma única circunferência. Então, dados A e B tais que A,B,O sejam não-colineares, existe uma única circunferência AOB. Quando A,B,O são colineares, no entanto, não existe tal circunferência. Mas existe uma *única* recta que passa por A e B (e O). Podemos ver a recta como uma circunferência degenerada ("raio infinito") ou mais explícitamente dizer que afinal o conjunto das linhas é o conjunto das circunferências através de O (menos o ponto O) união com o conjunto das rectas que passam por O (menos O).

b) A desigualdade triangular não se verifica. Basta indicar um contra-exemplo como o que se segue, obtido pela escolha de um ponto B interior à circunferência AC:



Pela definição dada, a distância AC é o arco a vermelho, cuja medida é maior que a soma das medidas dos arcos AB e BC (a verde). Note-se que, com B e as circunferências ABO e BCO fixas, podemos deslizar A e B ao longo dessas circunferências para obter uma circunferência AOC arbitrariamente grande, evidenciando assim que garantidamente o arco vernelho pode ser escolhido maior que a soma dos verdes.

FIM