

**U.C. 21082**  
**Matemática Finita**  
**6 de junho de 2018**

**- INSTRUÇÕES -**

- A prova é constituída por 4 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 4, 5 e 6 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos com letra legível.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas, ou respostas apresentadas em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular nem de elementos de consulta.
- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 horas e 30 minutos.**
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada questão incorreta será descontado  $\frac{1}{3}$  de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores. Os restantes grupos de questões têm as cotações seguintes:

4	5	6
3.2	1.5	4.3

Nome: .....

Nº de Estudante: ..... CC/BI nº .....

Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

### Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando  $\times$  no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. De quantas maneiras se podem reorganizar as letras da palavra “RESTAURAR”?

a)  $9! - 3! - 2!$

c)  $\frac{9^6}{2}$

b)  $\frac{9!}{3!}$

d) nenhuma das opções anteriores

2. Seja  $X$  um conjunto finito tal que  $\#X = n$  e  $a \notin X$ . Temos que  $\#(X \times (\{a\} \cup X))$  é igual a

a)  $n^2$

c)  $n^2 + n$

b)  $n^2 + 1$

d)  $2n$

3. Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , a seguinte implicação

Se  $a \equiv b \pmod{n}$  e  $b \equiv 1 \pmod{n}$  então  $-1 \equiv -a \pmod{n}$

a) é sempre falsa

c) é falsa apenas para  $n$  par

b) é falsa apenas para  $n$  primo

d) é sempre verdadeira

## RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

**Justifique** todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

4. O João tem 30 livros diferentes no seu quarto. Desses 30 livros, 14 são de Física e 16 de Matemática. Sabendo que pretende doar 5 livros a uma Instituição de Solidariedade, em cada uma das seguintes situações indique quantas alternativas diferentes existem para o conjunto de livros a doar.

4.1) Tem de doar exatamente dois livros de Matemática.

4.2) Não pode doar mais do que um livro de Física.

5. Determine o coeficiente de  $x^2y^6$  no desenvolvimento de  $(2x - y)^8$ .

6. Considere a relação de recorrência dada pela fórmula de recorrência

$$x_n = 8x_{n-1} - 15x_{n-2}, \quad n \geq 2$$

e pelas condições iniciais

$$x_0 = 1 \quad \text{e} \quad x_1 = 7.$$

6.1) Indique o polinómio característico da fórmula de recorrência acima e calcule as suas raízes.

6.2) Denotando por  $\langle a_n \rangle$  a sucessão solução da relação de recorrência acima, determine o seu termo geral.

6.3) Prove que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  se tem que  $a_n$  e 3 são primos entre si.

## FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x + y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM

---