I. Resolução:

Claramente, $v \oplus w,\ r \otimes v \in \mathbb{R}^3$ para todos $v, w \in \mathbb{R}^3, r \in \mathbb{R}$ (porque isto é óbvio, não é necessário para uma solução correta).

Resta verificar (A_1) a (A_4) e (M_1) a (M_4). Sejam $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', r, s \in \mathbb{R}$.

(A_1):

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' + 2 \\ b + b' - 1 \\ c + c' + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' + a + 2 \\ b' + b - 1 \\ c' + c + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

(A_2) :

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}\right) \oplus \begin{bmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' + 2 \\ b + b' - 1 \\ c + c' + 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a + a' + 2) + a'' + 2 \\ (b + b' - 1) + b'' - 1 \\ (c + c' + 1) + c'' + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + (a' + a'' + 2) + 2 \\ b + (b' + b'' - 1) - 1 \\ c + (c' + c'' + 1) + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a' + a'' + 2 \\ b' + b'' - 1 \\ c' + c'' + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{bmatrix}\right)$$

(A_3):

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2 + 2 \\ b + 1 - 1 \\ c - 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

(por cause de (A_1)). Portanto, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é o vetor nulo.

(A_4):

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -a - 4 \\ -b + 2 \\ -c - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - a - 4 + 2 \\ b - b + 2 - 1 \\ c - c - 2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -a-4 \\ -b+2 \\ -c-2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(por cause de (A_1)). Portanto $\begin{bmatrix} -a-4 \\ -b+2 \\ -c-2 \end{bmatrix} = \ominus \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ (onde usamos $\ominus$ em vez de $-$ para o negativo da operação $\oplus$).

(M_1):

$$r \otimes \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \right) = r \otimes \begin{bmatrix} a+a'+2 \\ b+b'-1 \\ c+c'+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cdot(a+a'+2)+2\cdot r-2 \\ r\cdot(b+b'-1)-r+1 \\ r\cdot(c+c'+1)+r-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (r\cdot a+2\cdot r-2)+(r\cdot a'+2\cdot r-2)+2 \\ (r\cdot b-r+1)+(r\cdot b'-r+1)-1 \\ (r\cdot c+r-1)+(r\cdot c'+r-1)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cdot a+2\cdot r-2 \\ r\cdot b-r+1 \\ r\cdot c+r-1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} r\cdot a'+2\cdot r-2 \\ r\cdot b'-r+1 \\ r\cdot c'+r-1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(r \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) \oplus \left(r \otimes \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \right)$$

(M_2):

$$(r+s) \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r+s)\cdot a+2\cdot(r+s)-2 \\ (r+s)\cdot b-(r+s)+1 \\ (r+s)\cdot c+(r+s)-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (r\cdot a+2\cdot r-2)+(s\cdot a+2\cdot s-2)+2 \\ (r\cdot b-r+1)+(s\cdot b-s+1)-1 \\ (r\cdot c+r-1)+(s\cdot c+s-1)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cdot a+2\cdot r-2 \\ r\cdot b-r+1 \\ r\cdot c+r-1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} s\cdot a+2\cdot s-2 \\ s\cdot b-s+1 \\ (s\cdot c+s-1 \end{bmatrix} = \left(r \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) \oplus \left(s \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right)$$

(M_3):

$$r\otimes\left(s\otimes\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right)=r\otimes\begin{bmatrix}s\cdot a+2\cdot s-2\\s\cdot b-s+1\\s\cdot c+s-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cdot(s\cdot a+2\cdot s-2)+2\cdot r-2\\r\cdot(s\cdot b-s+1)-r+1\\r\cdot(s\cdot c+s-1)+r-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(r\cdot s)\cdot a+2\cdot(r\cdot s)-2\\(r\cdot s)\cdot b-(r\cdot s)+1\\(r\cdot s)\cdot c+(r\cdot s)-1\end{bmatrix}=(r\cdot s)\otimes\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

(M_4):

$$1\otimes\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot a+2\cdot 1-2\\1\cdot b-1+1\\1\cdot c+1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

Portanto, $(\mathbb{R}^3,\oplus,\otimes)$ é um espaço vetorial real.

II. Resolução: A resolução dependerá do valor de r_2. Apresentamos um exemplo para o caso $r_2=1$.

Claremente, $v_1,v_2\neq 0_V$. Seja $r\in\mathbb{R}$, então $r\otimes v_1=\begin{bmatrix}12\cdot r-2\\1-r\\r-1\end{bmatrix}\neq v_2$ para todos os $r\in\mathbb{R}$. Portanto v_1,v_2 são linearmente independentes.

Temos $\langle v_1,v_2\rangle=\{r\otimes v_1\oplus s\otimes v_2 : r,s\in\mathbb{R}\}$

$$=\left\{\begin{bmatrix}12\cdot r-2\\1-r\\r-1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}3\cdot s-2\\1\\2\cdot s-1\end{bmatrix} : r,s\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}12\cdot r+3\cdot s-2\\-r+1\\r+2\cdot s-1\end{bmatrix} : r,s\in\mathbb{R}\right\}$$

Agora é fácil encontrar um vetor que não esteja neste conjunto. Uma escolha simples é definir $v_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ (mas existam muitas outras opções). Porque $v_3\notin\langle v_1,v_2\rangle$, sabemos que v_1,v_2,v_3 são linearmente independentes.

Temos $\langle v_1,v_2,v_3\rangle=\{r\otimes v_1\oplus s\otimes v_2\oplus t\otimes v_3 : r,s,t\in\mathbb{R}\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 12 \cdot r + 3 \cdot s - 2 \\ -r + 1 \\ r + 2 \cdot s - 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \cdot t - 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 12 \cdot r + 3 \cdot s + 2 \cdot t - 2 \\ -r + 1 \\ r + 2 \cdot s - 1 \end{bmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

No entanto, este conjunto é igual a V, pois podemos obter qualquer vetor $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ escolhendo $r = 1 - b, s = (c + r + 1)/2, t = (a + 2 - 12r - 3s)/2$. Portanto, (v_1, v_2, v_3) é base de V.

É necessário verificar tanto a independência linear de (v_1, v_2, v_3) como $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$, porque não podemos assumir que a dimensão de V é 3. Parece contra-intuitivo, mas é possível definir operações $\oplus$ e $\otimes$ que transformam $\mathbb{R}^3$ num espaço vetorial de dimensão 2 ou 4 (ou outros valores).

III. Resolução:

i) Sejam $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \in V$, então

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \right) = T\left(\begin{bmatrix} a + a' + 2 \\ b + b' - 1 \\ c + c' + 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (2(a + a' + 2) - (b + b' - 1) + 5)x^2 + (3(b + b' - 1) - (c + c' + 1) - 4)$$
$$= (2a - b + 5)x^2 + (3b - c - 4) + (2a' - b' + 5)x^2 + (3b' - c' - 4)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) \oplus T\left(\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \right)$$

Sejam $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in V, r \in \mathbb{R}$, então

$$T\left(r \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = T\left(\begin{bmatrix} r \cdot a + 2 \cdot r - 2 \\ r \cdot b - r + 1 \\ r \cdot c + r - 1 \end{bmatrix} \right)$$

$= (2(ra+2r-2)-(rb-r+1)+5)x^2+(3(rb-r+1)-(rc+r-1)-4)$
$= (2ra+4r-4-rb+r-1+5)x^2+(3rb-3r+3-rc-r+1-4)$
$= r\left((2a-b+5)x^2+(3b-c-4)\right)$
$= r \cdot T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)$

ii) A resolução dependerá do valor de r_2 e a resolução especifica de II. Usamos o mesmo exemplo de II. (para o caso $r_2 = 1$).

Temos

$T(v_1) = 25x^2 - 4 = 25(x^2+1) + 29(x-1) - 29x,$
$T(v_2) = 6x^2 - 2 = 6(x^2+1) + 8(x-1) - 8x,$
$T(v_3) = 4x^2 = 4(x^2+1) + 4(x-1) - 4x.$

Portanto $A = \begin{bmatrix} 25 & 6 & 4 \\ 29 & 8 & 4 \\ -29 & -8 & -4 \end{bmatrix}$

FIM