Elementos de Análise Infinitesimal I | 21030

Proposta de Resolução Sumária

1. Tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Uma vez que as funções que surgem no numerador e no denominador são ambas diferenciáveis com $\operatorname{sen}^2(x) \neq 0$ para $x \neq 0$ numa vizinhança de 0, utilizemos a versão da regra de Cauchy (Teorema 2, pág. 365). Por ela, obtém-se então o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}, \tag{1}$$

que é novamente uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Uma nova aplicação da regra de Cauchy conduz a

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\cos^2(x)-2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Como este último limite existe, resulta do Teorema 2 (pág. 365) que o limite (1) também existe, tendo-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = 0.$$

Da existência deste limite e novamente pelo Teorema 2 (pág. 365) conclui-se então que o limite do enunciado existe e é igual a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{\operatorname{sen}^2(x)} = 0.$$

2.1. Considere-se a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = 1 + t^a - (1+t)^a, \quad t \in [0,1]\,.$$

Trata-se de uma função diferenciável em $]0,1[$ com

$$f'(t) = a(t^{a-1} - (1+t)^{a-1}), \quad \forall\, t \in \,]0,1[\,.$$

Como $0 < a \leq 1$ (o que implica que $a - 1 \leq 0$), para $t \in \,]0,1[$ tem-se

$$t < t+1 \implies (t+1)^{a-1} < t^{a-1} \implies f'(t) > 0.$$

Assim sendo, a função f é estritamente crescente em $[0,1]$ (cf. Teorema 1, pág. 337). Como $f(0) = 0$ tem-se assim que $f(t) \geq f(0) = 0$ para todo o $t \in [0,1]$, o que prova a desigualdade pretendida.

2.2. Dados $x, y > 0$, sem perda de generalidade suponhamos que $y \leq x$. Logo $0 < \frac{y}{x} \leq 1$, resultando da alínea anterior que

$$(x+y)^a = x^a \left(1 + \frac{y}{x}\right)^a \leq x^a \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^a\right) = x^a + y^a.$$

Os casos em que $x = 0$ ou $y = 0$ são de fácil verificação.

2.3. Como $0 < a \leq 1$ e $0 \leq x_n^a \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ (o que conduz a $0 \leq x_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$), tem-se

$$x_n \leq x_n^a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

resultando a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ e da aplicação do critério geral da comparação (Teorema 5, pág. 592).

Para provar a desigualdade do enunciado, observe-se que pela alínea 2.2 tem-se

$$(x_1 + x_2)^a \leq x_1^a + x_2^a.$$

Mais geralmente, pelo método de indução (exercício) tem-se

$$(\underbrace{x_1 + \ldots + x_n}_{:=S_n})^a \leq x_1^a + \ldots + x_n^a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, por definição de série convergente (Definição 1 pág. 575), conclui-se que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)^a = (\lim_n S_n)^a = \lim_n S_n^a \leq \lim_n x_1^a + \ldots + x_n^a := \sum_{n=1}^{\infty} x_n^a,$$

onde na segunda igualdade se utilizou a continuidade da função $[0, +\infty[\, \ni x \mapsto x^a$.

3. Comece-se por observar que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, por ser soma das funções contínuas em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{sen}(\pi x)$ (trigonométrica) e $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2x^3 - 4$ (polinomial). Assim e em particular, f é contínua no intervalo limitado e fechado $[1, 2]$. Como

$$f(1) = \operatorname{sen}(\pi) + 2 - 4 = -2 < 0$$

e

$$f(2) = \operatorname{sen}(2\pi) + 2 \times 2^3 - 4 = 12 > 0,$$

resulta do teorema de Bolzano ou do valor intermédio (Teorema 2, pág. 246) que existe um ponto $c \in \,]1, 2[$ tal que $f(c) = 0$.

Vejamos que tal ponto é único por recurso ao teorema de Rolle (Teorema 2, pág. 315). Para o efeito, observe-se que a função f também é diferenciável em $\mathbb{R}$ (por ser soma de uma função trigonométrica e de uma função polinomial), tendo-se

$$f'(x) = \pi \cos(\pi x) + 6x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Desta expressão resulta, para $x \in \,]1, 2[$, que

$$1 < x < 2 \implies -1 < \cos(\pi x) < 1 \implies -\pi < \pi \cos(\pi x) < \pi$$

e

$$x > 1 \implies x^2 > 1 \implies 6x^2 > 6,$$

pelo que

$$f'(x) = \pi \cos(\pi x) + 6x^2 \geq -\pi + 6 > 0, \quad \forall\, x \in \,]1, 2[\,. \qquad (2)$$

Isto permite concluir a unicidade de c. Com efeito, se existisse um segundo ponto $d \in \,]1, 2[$ tal que $f(d) = 0$, então, pelo teorema de Rolle, a função f' teria que se anular nalgum ponto do intervalo $]1, 2[$, o que contradiz (2). Por absurdo, fica assim provada a unicidade da raiz c.