UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21037
Elementos de Probabilidades e Estatística

3 de julho de 2015

Critérios de avaliação:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas (por exemplo, probabilidades ou frequências relativas de valor superior a 1).

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1. (**Exame**: 4.70 valores)

Para a resolução deste grupo considerem-se os seguintes acontecimentos:

$$A -'' \text{A empresa tem departamento de controlo de qualidade}'',$$
$$B -'' \text{A empresa tem departamento de recursos humanos}''.$$

1.1. (**Exame**: 1.60 valores)

Nesta alínea pretende-se determinar $P(A \cup B)$. Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.60 + 0.40 - 0.20 = 0.80.$$

1.2. (**Exame**: 1.60 valores)
Nesta questão pretende-se determinar a probabilidade do acontecimento

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Neste caso,

$$P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.80 - 0.20 = 0.60.$$

1.3. (**Exame**: 1.50 valores)
Tem-se

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.80 = 0.20.$$

2. (**Exame**: 3.0 valores)

Designemos por X a variável aleatória "número de telefones que avariam por mês".

2.1. (**Exame**: 1.50 valores; **P-fólio**[1]: 1.0 valor)
Por consulta da tabela anexa ao enunciado da prova, tem-se

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.9580 = 0.042.$$

2.2. (**Exame**: 1.50 valores)
Nesta alínea pretende-se determinar o valor mínimo k tal que

$$P(X > k) \leq 0.1,$$

o que é equivalente a

$$P(X \leq k) = 1 - P(X > k) \geq 1 - 0.1 = 0.9.$$

Consultando novamente a tabela anexa ao enunciado conclui-se que $P(X \leq 4) = 0.8912 < 0.9$ e $P(X \leq 5) = 0.9580 > 0.9$, pelo que $k = 5$.

3. (**Exame**: 6.30 valores; **P-fólio**[2]: 4.50 valores)

3.1. (**Exame e P-fólio**: 1.70 valores)
Por definição de função de probabilidade marginal,

$$0.45 = f_X(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = 0.10 + f(0,1) + 0.20,$$

pelo que $f(0,1) = 0.15$. Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} 0.25 &= f_Y(0) = f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) = f(1,0) + 0.15 \implies f(1,0) = 0.10, \\ 0.40 &= f_Y(2) = f(0,2) + f(1,2) + f(2,2) = f(2,2) + 0.35 \implies f(2,2) = 0.05, \end{aligned}$$

resultando do penúltimo valor obtido,

$$f_X(1) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = 0.10 + 0.15 + 0.15 = 0.40.$$

[1] Pergunta 1 do P-fólio.
[2] Grupo 2 do P-fólio.

Como
$$\sum_{x=0}^{2} f_X(x) = \sum_{y=0}^{2} f_Y(y) = 1,$$
resulta que
$$f_X(2) = 1 - f_X(0) - f_X(1) = 0.15, \quad f_Y(1) = 1 - f_Y(0) - f_Y(2) = 0.35,$$
pelo que o único valor em falta, $f(2,1)$, é igual a
$$f(2,1) = f_Y(1) - f(0,1) - f(1,1) = 0.05.$$
A tabela completa é assim dada por

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$f_X(x)$
$x=0$	0.10	**0.15**	0.20	0.45
$x=1$	**0.10**	0.15	0.15	**0.40**
$x=2$	0.05	**0.05**	**0.05**	**0.15**
$f_Y(y)$	0.25	**0.35**	0.40	**1**

3.2. (**Exame**: 1.50 valores; **P-fólio**: 1.0 valor)
Por definição de função de probabilidade conjunta e de função de probabilidade marginal,

- $P(X \leq 1, Y = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) := f(0,1) + f(1,1) = 0.30,$
- $P(X \leq 1, Y \leq 2) = P(X = 0, Y \leq 2) + P(X = 1, Y \leq 2) = f_X(0) + f_X(1) = 0.85,$
- $P(Y \geq 2) = P(Y = 2) := f_Y(2) = 0.40.$

3.3. (**Exame**: 1.50 valores)
Tem-se
$$E(X) = \sum_{x=0}^{2} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{2} x f_X(x) = 0.40 + 2 \times 0.15 = 0.70$$
e
$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 P(X = x) = \sum_{x=0}^{2} x^2 f_X(x) = 0.40 + 4 \times 0.15 = 1.0,$$
pelo que
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.51.$$

3.4. (**Exame**: 1.60 valores; **P-fólio**: 1.80 valores)
Tem-se
$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyP(X = x, Y = y) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y) \\ &= f(1,1) + 2f(1,2) + 2f(2,1) + 4f(2,2) = 0.75 \end{aligned}$$

e

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{2} yP(Y = y) = \sum_{y=0}^{2} y f_Y(y) = 1.15,$$

donde

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.75 - 0.70 \times 1.15 = -0.055.$$

Sendo o valor da covariância diferente de zero, conclui-se que as variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

4. (**Exame**: 6.0 valores; **P-fólio**[3]: 6.50 valores)

4.1. (**Exame e P-fólio**: 1.50 valores)
Sendo f uma função densidade de probabilidade,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Assim sendo, atendendo ao modo como a função f está definida obtém-se

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = c \int_{0}^{3} x^2\, dx = 9c,$$

pelo que $c = \frac{1}{9}$.

4.2. (**Exame e P-fólio**: 1.50 valores)
Para cada valor inteiro k positivo tem-se que o momento de ordem k é igual a

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx = \frac{1}{9} \int_{0}^{3} x^{k+2}\, dx = \frac{3^{k+3}}{9(k+3)} = \frac{3^{k+1}}{k+3}.$$

4.3. (**Exame e P-fólio**: 1.50 valores)
Tem-se

$$P(1 < X \leq 2) = \frac{1}{9} \int_{1}^{2} x^2\, dx = \frac{7}{27}$$

e

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \int_{-\infty}^{1} f(x)\, dx = 1 - \frac{1}{9} \int_{0}^{1} x^2\, dx = \frac{26}{27}.$$

Uma vez que a variável aleatória é contínua,

$$P(X < 2 \,|\, X \geq 1) := \frac{P(1 \leq X < 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(1 < X \leq 2)}{P(X > 1)},$$

donde, pelos dois cálculos anteriores,

$$\frac{P(1 < X \leq 2)}{P(X > 1)} = \frac{7}{26}.$$

[3] Grupo 3 do P-fólio.

4.4. (**Exame**: 1.50 valores; **P-fólio**: 2.0 valores)

Tal como no Exercício 11.3 da Actividade Formativa 2, por primitivação da função f obtém-se

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \\ \frac{x^3}{27}, \ 0 \leq x < 3 \\ \\ 1, \ x \geq 3 \end{cases}$$