UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

p-Fólio

U.C. 21079

Lógica e Teoria de Conjuntos - Resolução

11 de fevereiro de 2020

- INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas, ou respostas apresentadas em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de máquina de calcular nem de elementos de consulta.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 horas e 30 minutos**.
- As questões terão as cotações seguintes:

1	2	3	4
3.0	4.0	1.0	4.0

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1. Considere as seguintes proposições atómicas:

p: A Joana foi votar.

q: A Joana saiu de casa.

r: Choveu no dia das eleições.

a) Formalize em linguagem simbólica (do Cálculo Proposicional) as seguintes afirmações

(i) Se não choveu no dia das eleições, a Joana saiu de casa e foi votar.
Resolução: $\neg r \Rightarrow (q \wedge p)$

(ii) Se a Joana não foi votar, então choveu no dia das eleições.
Resolução: $\neg p \Rightarrow r$

b) Demonstre no sistema de Dedução Natural que

$$p \wedge \neg q \vdash \neg(p \Rightarrow q)$$

Resolução:

–	1.	$p \wedge \neg q$	Hip.
$\{2\}$	2.	$p \Rightarrow q$	Hip.$[\neg I]$
$\{2\}$	3.	p	$1[\wedge E1]$
$\{2\}$	4.	$\neg q$	$1[\wedge E2]$
$\{2\}$	5.	q	$2,3[\Rightarrow E]$
$\{2\}$	6.	$\perp$	$4,5[\neg E]$
–	7.	$\neg(p \Rightarrow q)$	$2-6[\neg I]$

2. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade cujos parâmetros $\bar{n}$ (símbolos de constantes), P (símbolo de relação 1-ária), R (símbolo de relação 2-ária) e respetivas interpretações são:

Domínio de interpretação: as variáveis denotam os números naturais.

$\bar{n}$: "o número natural n".

$P(x)$: "x é um número primo".

$R(x, y)$: "x divide y".

a) Determine a fbf de $\mathcal{L}$ correspondente à seguinte proposição composta.
"Nenhum número primo diferente de 2 é divisível por 2".

Resolução: $\neg\exists x(P(x) \wedge \neg(x = \bar{2}) \wedge R(\bar{2}, x))$ ou alternativamente $\forall x(P(x) \wedge \neg(x = \bar{2}) \Rightarrow \neg R(\bar{2}, x))$

b) Indique o subconjunto de $\mathbb{N}$ que é definido pela interpretação da seguinte fbf de $\mathcal{L}$.

$$P(x) \wedge R(x, \overline{24}).$$

Resolução: Os números naturais que satisfazem a fórmula são os números primos divisores de 24. Como os divisores de 24 são os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, temos que o conjunto pretendido é $\{2, 3\}$.

3. Considere os conjuntos $x = \{b, c, d, e\}$ e $y = \{a, c, d, e\}$. Determine

$$(y \setminus x) \cup \mathcal{P}(x \setminus y)$$

Resolução: Temos $y \setminus x = \{a\}$, $x \setminus y = \{b\}$, logo $\mathcal{P}(x \setminus y) = \{\emptyset, \{b\}\}$. Assim $(y \setminus x) \cup \mathcal{P}(x \setminus y) = \{a\} \cup \{\emptyset, \{b\}\} = \{a, \emptyset, \{b\}\}$.

4. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem, com parâmetro R (símbolo de predicado 2-ário) cuja respetiva interpretação é:

Domínio de interpretação: as variáveis denotam os números inteiros ($\mathbb{Z}$).

$R(x, y)$: "x é múltiplo y".

a) Diga, justificando, se a relação R é

(i) reflexiva

Resolução: Sim, a relação R é reflexiva pois todo o número inteiro é múltiplo de si próprio, i.e. $\exists k (= 1)$ tal que $x = kx$, ou seja $\forall x \in \mathbb{Z}, R(x, x)$.

(ii) simétrica.

Resolução: Não, a relação R não é simétrica. Por exemplo 4 é múltiplo de 2 $(4 = 2 \times 2)$ mas 2 não é múltiplo de 4 (se $2 = k \times 4$ então $k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

b) Diga, justificando, se a fbf de $\mathcal{L}$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x))$$

com a interpretação acima, é uma proposição verdadeira.

Resolução: A proposição é falsa. Tome como contraexemplo $x = y = 1$. Tem-se que $R(1, 1) \Rightarrow \neg R(1, 1)$ é proposição falsa pois o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

FIM
